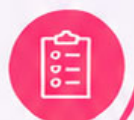


با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe





گام به گام ریاضی هشتم

فصل سوم

عنوان فصل: چندضلعی‌ها

از صفحه‌ی ۳۱ تا صفحه‌ی ۵۴ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل چندضلعی‌ها آمده است. مباحث فصل: گفت‌وگو، کارگاه بازی، چندضلعی‌ها و تقارن، توازی و تعامد، چهارضلعی‌ها، زاویه‌های داخلی و خارجی، کاشی‌کاری

تهیه شده در ایران توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۳۵۰ تمرین ۱ — چندضلعی‌ها و تقارن	۸
۲	صفحه ۳۵۰ تمرین ۲ — چندضلعی‌ها و تقارن	۸
۳	صفحه ۳۵۰ تمرین ۳ — چندضلعی‌ها و تقارن	۹
۴	صفحه ۳۵۰ تمرین ۴ — چندضلعی‌ها و تقارن	۹
۵	صفحه ۳۶۰ تمرین ۵ — چندضلعی‌ها و تقارن	۱۱
۶	صفحه ۳۶۰ تمرین ۶ — چندضلعی‌ها و تقارن	۱۲
۷	صفحه ۳۶۰ تمرین ۷ — چندضلعی‌ها و تقارن	۱۲
۸	صفحه ۳۶۰ تمرین ۸ — چندضلعی‌ها و تقارن	۱۳
۹	صفحه ۳۶۰ تمرین ۹ — چندضلعی‌ها و تقارن	۱۴
۱۰	صفحه ۳۶۰ تمرین ۱۰ — چندضلعی‌ها و تقارن	۱۴
۱۱	صفحه ۳۷۰ تمرین ۱۱ — چندضلعی‌ها و تقارن	۱۵
۱۲	صفحه ۳۷۰ تمرین ۱۲ — چندضلعی‌ها و تقارن	۱۶
۱۳	صفحه ۳۷۰ تمرین ۱ — توازی و تعامد	۱۷

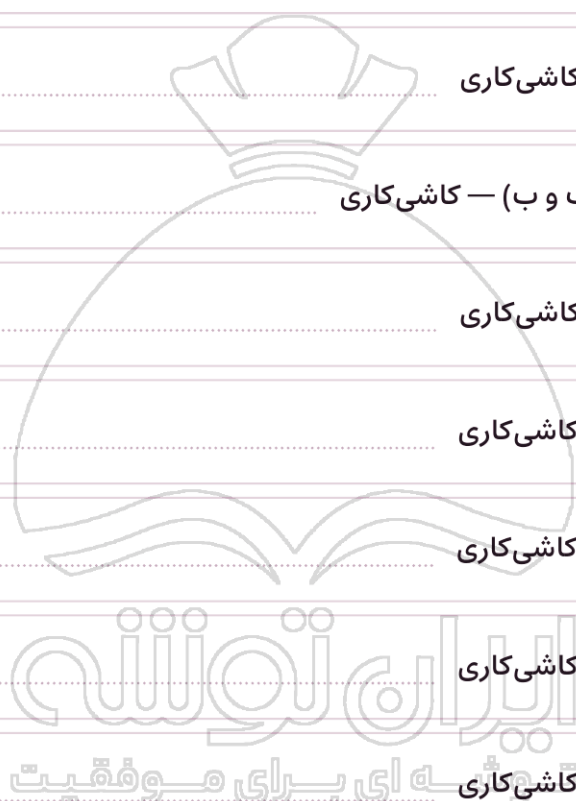
۱۷		صفحه ۳۸ · تمرین ۲ — توازی و تعامد	۱۴
۱۸		صفحه ۳۸ · تمرین ۳ — توازی و تعامد	۱۵
۱۹		صفحه ۳۸ · تمرین ۴ — توازی و تعامد	۱۶
۱۹		صفحه ۳۸ · تمرین ۵ — توازی و تعامد	۱۷
۲۰		صفحه ۳۹ · تمرین ۶ — توازی و تعامد	۱۸
۲۰		صفحه ۳۹ · تمرین ۷ — توازی و تعامد	۱۹
۲۱		صفحه ۳۹ · تمرین ۸ — توازی و تعامد	۲۰
۲۱		صفحه ۳۹ · تمرین ۹ — توازی و تعامد	۲۱
۲۲		صفحه ۳۹ · تمرین ۱۰ — توازی و تعامد	۲۲
۲۲		صفحه ۴۰ · تمرین ۱۱ — توازی و تعامد	۲۳
۲۳		صفحه ۴۰ · تمرین ۱۲ — توازی و تعامد	۲۴
۲۴		صفحه ۴۱ · تمرین ۱ — چهارضلعی‌ها	۲۵
۲۴		صفحه ۴۱ · تمرین ۲ — چهارضلعی‌ها	۲۶
۲۵		صفحه ۴۱ · تمرین ۳ — چهارضلعی‌ها	۲۷
۲۵		صفحه ۴۱ · تمرین ۴ — چهارضلعی‌ها	۲۸



۲۵		صفحه ۴۱ · تمرین ۵ — چهارضلعی ها	۲۹
۲۶		صفحه ۴۱ · تمرین ۶ — چهارضلعی ها	۳۰
۲۶		صفحه ۴۱ · تمرین ۷ — چهارضلعی ها	۳۱
۲۶		صفحه ۴۱ · تمرین ۸ — چهارضلعی ها	۳۲
۲۷		صفحه ۴۱ · تمرین ۹ — چهارضلعی ها	۳۳
۲۸		صفحه ۴۱ · تمرین ۱۰ — چهارضلعی ها	۳۴
۲۸		صفحه ۴۲ · تمرین ۱ — زاویه های داخلی و خارجی	۳۵
۲۹		صفحه ۴۲ · تمرین ۲ — زاویه های داخلی و خارجی	۳۶
۲۹		صفحه ۴۳ · تمرین ۳ — زاویه های داخلی و خارجی	۳۷
۳۰		صفحه ۴۳ · تمرین ۴ — زاویه های داخلی و خارجی	۳۸
۳۰		صفحه ۴۳ · تمرین ۵ — زاویه های داخلی و خارجی	۳۹
۳۱		صفحه ۴۳ · تمرین ۶ — زاویه های داخلی و خارجی	۴۰
۳۲		صفحه ۴۳ · تمرین ۷ — زاویه های داخلی و خارجی	۴۱
۳۲		صفحه ۴۳ · تمرین ۸ — زاویه های داخلی و خارجی	۴۲
۳۳		صفحه ۴۴ · تمرین ۹ — زاویه های داخلی و خارجی	۴۳

۳۳	صفحه ۴۴ · تمرین ۱۰ — زاویه‌های داخلی و خارجی	۴۴
۳۴	صفحه ۴۴ · تمرین ۱۱ — زاویه‌های داخلی و خارجی	۴۵
۳۴	صفحه ۴۴ · تمرین ۱۲ — زاویه‌های داخلی و خارجی	۴۶
۳۵	صفحه ۴۵ · تمرین ۱۳ — زاویه‌های داخلی و خارجی	۴۷
۳۶	صفحه ۴۶ · تمرین ۱۴ — زاویه‌های داخلی و خارجی	۴۸
۳۷	صفحه ۴۶ · پروژه ۱۵ — زاویه‌های داخلی و خارجی	۴۹
۳۸	صفحه ۴۶ · پروژه ۱۶ — زاویه‌های داخلی و خارجی	۵۰
۳۸	صفحه ۴۷ · تمرین ۱ — کاشی‌کاری	۵۱
۳۹	صفحه ۴۸ · تمرین ۱ (ج) — کاشی‌کاری	۵۲
۴۰	صفحه ۴۸ · تمرین ۲ — کاشی‌کاری	۵۳
۴۰	صفحه ۴۸ · تمرین ۳ — کاشی‌کاری	۵۴
۴۱	صفحه ۴۹ · تمرین ۴ — کاشی‌کاری	۵۵
۴۱	صفحه ۴۹ · تمرین ۵ — کاشی‌کاری	۵۶
۴۲	صفحه ۴۹ · تمرین ۶ — کاشی‌کاری	۵۷
۴۳	صفحه ۵۰ · تمرین ۷ — کاشی‌کاری	۵۸

۵۹	صفحه ۵۰ . تمرین ۸ — کاشی کاری	۴۴
۶۰	صفحه ۵۰ . تمرین ۹ — کاشی کاری	۴۴
۶۱	صفحه ۵۰ . تمرین ۱۰ — کاشی کاری	۴۵
۶۲	صفحه ۵۰ . تمرین ۱۱ — کاشی کاری	۴۶
۶۳	صفحه ۵۰ . تمرین ۱۲ — کاشی کاری	۴۶
۶۴	صفحه ۵۰ . تمرین ۱۳ — کاشی کاری	۴۷
۶۵	صفحه ۵۱ . تمرین ۱۳ (الف و ب) — کاشی کاری	۴۷
۶۶	صفحه ۵۲ . تمرین ۱۴ — کاشی کاری	۴۷
۶۷	صفحه ۵۲ . تمرین ۱۵ — کاشی کاری	۴۸
۶۸	صفحه ۵۳ . تمرین ۱۶ — کاشی کاری	۴۹
۶۹	صفحه ۵۴ . تمرین ۱۷ — کاشی کاری	۵۱
۷۰	صفحه ۵۴ . تمرین ۱۸ — کاشی کاری	۵۱
۷۱	صفحه ۵۴ . تمرین ۱۹ — کاشی کاری	۵۲



۱. در بازی مثلث که در بخش قبل معرفی شد،

الف) نفر اول چگونه بازی کند که همیشه برنده باشد؟

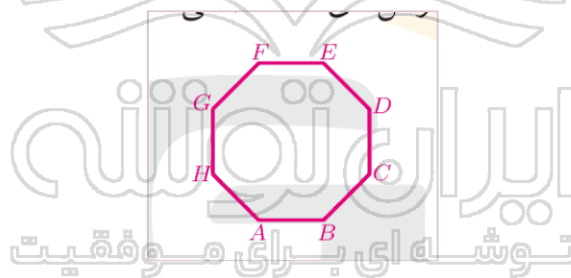
ب) فرض کنید بازی را با n نقطه ($n > 4$) از رأس‌های یک n -ضلعی منتظم انجام می‌دهید. برای چه n هایی نفر اول همیشه می‌تواند برنده باشد؟ برای چه n هایی نفر دوم می‌تواند همیشه برنده باشد؟

الف) بازی را همه‌ی حالت‌ها بررسی کردیم (پاره‌خط‌ها مشترک‌اند و هر کس مثلثی بسازد می‌بازد). نفر اول با شش نقطه می‌تواند همیشه برنده شود؛ باید پاره‌خط‌ها را طوری بکشد که در پایان تعداد پاره‌خط‌های «بدون مثلث» فرد شود (مثلاً شکلی شبیه دو مجموعه‌ی سه نقطه‌ای که فقط بین دو مجموعه پاره‌خط دارد، با ۹ پاره‌خط)، تا نفر دوم مجبور شود مثلث بسازد.

ب) بررسی همه‌ی حالت‌ها: برای $n=5$ و $n=7$ نفر دوم همیشه می‌تواند برنده باشد و برای $n=6$ نفر اول؛ برای n های بزرگ‌تر قاعده‌ی ساده‌ای نیافتیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲. چند تا چندضلعی منتظم درون هشتضلعی منتظم زیر می‌توان رسم کرد که همه‌ی رأس‌های هر یک از آنها روی رأس‌های هشتضلعی منتظم زیر باشد؟



هشت رأس هشتضلعی منتظم روی یک دایره و با فاصله‌های برابر قرار دارند؛ هر دو رأس مجاور، کمان 45° را جدا می‌کنند. رأس‌های هر چندضلعی منتظم هم با فاصله‌های برابر روی دایره‌ی گذرنده از آنها قرار دارند و هر سه رأس هشتضلعی دایره‌ی همین هشتضلعی را مشخص می‌کنند.

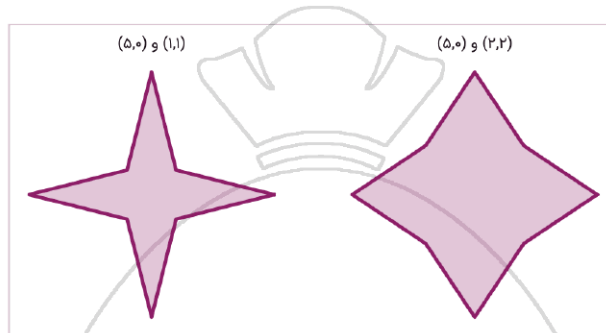
اگر چندضلعی منتظم k رأس داشته باشد، هر کمان بین دو رأس مجاورش $k \div 360^\circ$ است و باید مضرب صحیحی از 45° باشد؛ یعنی k باید مقسوم‌علیه ۸ باشد. چون $k \geq 3$ ، فقط $k=4$ و $k=8$ می‌ماند.

○ $k=4$: مربع. دو مربع داریم: ACEG و BDFH.

○ $k=8$: خود هشتضلعی ABCDEFGH.

۳. یک هشت ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر بسازید. هشت ضلعی مقعر دیگری با ضلع‌های برابر بسازید که با هشت ضلعی اول هم‌زهشت نباشد.

دو ستاره‌ی چهارپیر می‌سازیم. رأس‌های «بیرونی» هر دو را $(۵,۰)$ ، $(۰,۵)$ ، $(۰,-۵)$ و $(-۵,۰)$ می‌گیریم. رأس‌های «درونی» را برای شکل اول $(۱,۱)$ و برای شکل دوم $(۲,۲)$ می‌گیریم؛ یعنی شکل اول با رأس‌های $(۵,۰)$ ، $(۰,۵)$ ، $(-۵,۰)$ ، $(۰,-۵)$ ، $(-۱,-۱)$ ، $(-۱,۱)$ ، $(۱,۱)$ و شکل دوم با همین ترتیب ولی با ۲ به جای ۱.



۱. **ضلع‌ها برابرند:** با قضیه‌ی فیثاغورس، فاصله‌ی $(۵,۰)$ تا $(۱,۱)$ در شکل اول $\sqrt{۴^2+۱^2}=\sqrt{۱۷}$ است. شکل نسبت به دوران ۹۰° و نسبت به محورهای مختصات و دو نیم‌ساز ربع‌ها متقارن است، پس هر هشت ضلع با این ضلع هم‌زهشت‌اند و همگی برابر $\sqrt{۱۷}$ هستند. در شکل دوم، فاصله‌ی $(۵,۰)$ تا $(۲,۲)$ برابر $\sqrt{۳^2+۲^2}=\sqrt{۱۳}$ است و همه‌ی ضلع‌ها برابر $\sqrt{۱۳}$ ‌اند.
۲. **مقعر است:** رأس‌های درونی $(۱,۱)$ و $(۲,۲)$ پایین‌تر از خط $x+y=۵$ (خط واصل دو رأس بیرونی مجاور) قرار دارند؛ پس در این رأس‌ها زاویه‌ی داخلی از ۱۸۰° بیشتر است.
۳. **هم‌زهشت نیستند:** ضلع‌های شکل اول $\sqrt{۱۷}$ و ضلع‌های شکل دوم $\sqrt{۱۳}$ است.

پاسخ: دو ستاره‌ی چهارپیر بالا (ضلع‌ها $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۱۳}$)

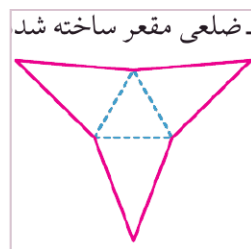
این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

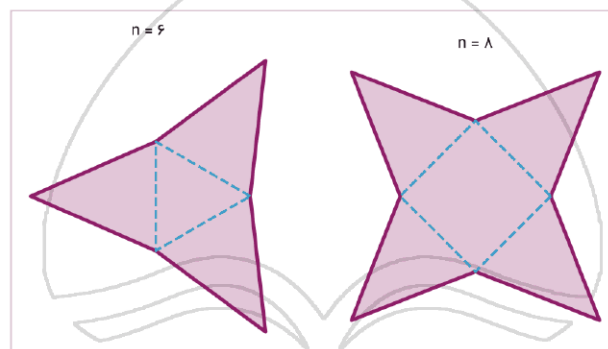


۴. فرض کنید n عددی زوج و بزرگ‌تر از ۴ باشد.

- الف) باتوجه به شکل زیر، روشی برای رسم یک n -ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر پیدا کنید. برای چه n ‌هایی، n -ضلعی مقعر ساخته شده مرکز تقارن دارد؟
- ب) روش دیگری برای ساخت یک n -ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر که محور و مرکز تقارن ندارند، پیدا کنید.



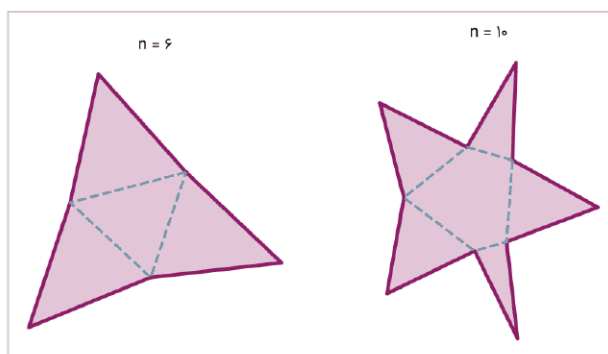
الف) روش: یک k -ضلعی منتظم (خط‌چین) بگیرید ($k = n \div 2$). روی هر ضلع آن، به سمت بیرون، یک مثلث متساوی‌الساقین بسازید که دو ساق آن هر کدام برابر s باشد؛ s را کمی بزرگ‌تر از ضلع k -ضلعی (مثلاً $1,25$ برابر) می‌گیریم. مرز بیرونی، $2k = n$ ضلع دارد و همه‌ی آنها (ساق‌ها) برابر s ‌اند. رأس‌های k -ضلعی منتظم رأس‌های رو به درون هستند که زاویه‌ی داخلی آنها از 180° بیشتر است؛ پس چندضلعی مقعر است. شکل زیر حالت‌های $n=6$ و $n=8$ را نشان می‌دهد.



مرکز تقارن: این شکل با دوران $k \div 360^\circ$ حول مرکز k -ضلعی بر خودش منطبق می‌شود و مرکز تقارنش فقط همین نقطه می‌تواند باشد (مرکز تقارن یک چندضلعی، مرکز رأس‌های آن است). دوران 180° یکی از دوران‌های $k \div 360^\circ$ ، $2 \times (360^\circ \div k)$ ، ... است اگر و فقط اگر k زوج باشد. پس k باید زوج باشد، یعنی $n = 2k$ مضرب ۴ باشد.

پاسخ الف): n مضرب ۴ باشد؛ یعنی $n = 8, 12, 16, \dots$ (برای $n = 6, 10, 14, \dots$ مرکز تقارن وجود ندارد)

ب) روش: همان کار را با یک k -ضلعی محدب **نامتقارن** (بدون محور و مرکز تقارن؛ مثلاً مثلث مختلف‌الاضلاع) انجام می‌دهیم: روی هر ضلع آن یک مثلث متساوی‌الساقین بیرونی می‌سازیم که ساق‌هایش همگی برابر همان s ‌اند؛ s را کمی بزرگ‌تر از بلندترین ضلع k -ضلعی می‌گیریم. باز $2k$ ضلع برابر داریم و k رأس درونی مقعر است. هر تقارنی از شکل، رأس‌های مقعر را به رأس‌های مقعر می‌برد و در نتیجه k -ضلعی درونی را بر خودش منطبق می‌کند؛ چون آن k -ضلعی هیچ تقارنی ندارد، شکل ساخته‌شده هم محور و مرکز تقارن ندارد. شکل زیر حالت‌های $n=6$ و $n=10$ را نشان می‌دهد.



پاسخ (ب): ساختن روی یک k -ضلعی محدب بدون تقارن (با ساق‌های برابر)

تمرین ۵

صفحه ۳۶

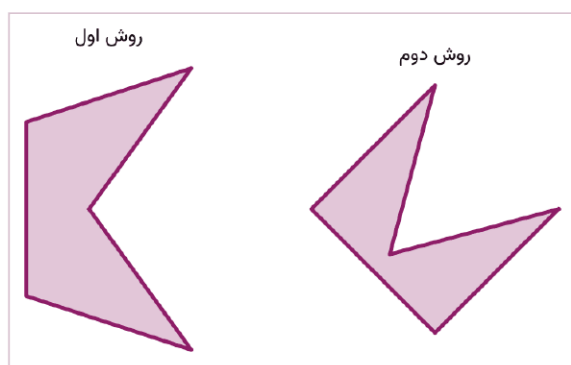
۵

۵. فرض کنید n عددی فرد و بزرگ‌تر از ۳ باشد. آیا می‌توانید حداقل دو روش برای ساختن یک n -ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر ارائه دهید؟

بله. دو روش (برای هر n فرد بزرگ‌تر از ۳):

روش اول: یک n -ضلعی منتظم بگیرید. رأس V با دو رأس مجاورش U و W را در نظر بگیرید و V را نسبت به خط UW قرینه کنید تا V' به دست آید. چون قرینه‌سازی طول‌ها را حفظ می‌کند، $UV'=UV$ و $V'W=VW$ برابر ضلع‌های دیگرند. نقطه‌ی V' درون چندضلعی منتظم می‌افتد، پس شکل ساده است و زاویه‌ی داخلی آن در V' برابر $\angle UVW - 36^\circ$ و بزرگ‌تر از 180° است (مقعر).

روش دوم: یک $(n-1)$ -ضلعی منتظم بگیرید ($n-1 \geq 4$). روی یکی از ضلع‌هایش AD ، یک مثلث متساوی‌الاضلاع ADE را به سمت درون چندضلعی بسازید و ضلع AD را با دو ضلع AE و ED جایگزین کنید. اکنون n ضلع داریم که همه با ضلع AD برابرند. فاصله‌ی E از AD برابر $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD \approx 0.87 \cdot AD$ برابر ضلع است و کمتر از پهنای چندضلعی در آن امتداد (دست‌کم برابر یک ضلع) است؛ پس E درون چندضلعی می‌افتد و زاویه‌ی AED با $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ بزرگ‌تر از 180° می‌شود (مقعر).



(شکل بالا حالت $n=5$ را نشان می‌دهد: روش اول، پنج‌ضلعی منتظم با یک رأس قرینه‌شده؛ روش دوم، مربع با ضلعی که با یک مثلث متساوی‌الاضلاع به درون فرو رفته است.)

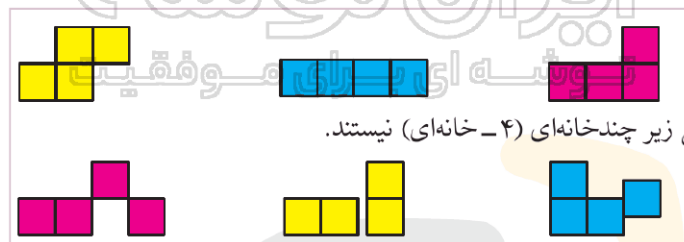
۶. شکلی مثال بزنید که محور تقارن داشته باشد ولی مرکز تقارن نداشته باشد.

هر مثلث متساوی الساقین غیرمتساوی الاضلاع، مثلاً مثلثی با رأس‌های $(0,0)$ ، $(4,0)$ و $(2,5)$.

- **محور تقارن دارد:** عمود منصف قاعده (خط $x=2$) محور تقارن آن است.
- **مرکز تقارن ندارد:** اگر شکلی مرکز تقارن داشته باشد، هر رأس آن با قرینه‌اش نسبت به مرکز، رأس دیگری از شکل است و رأس‌ها دوبره دو جفت می‌شوند؛ پس تعداد رأس‌ها زوج است، ولی مثلث ۳ رأس دارد. (هر شکل دیگری مانند بادبادک غیرلوزی هم قابل قبول است.)

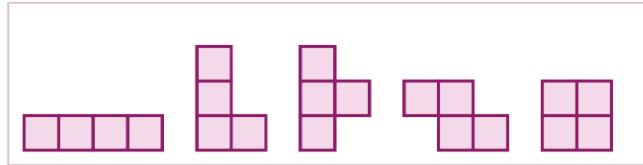
پاسخ: مثلث متساوی الساقین (که متساوی الاضلاع نباشد)

۷. به شکل‌هایی در صفحه که از به هم چسباندن یک یا چند ضلع مربع‌های واحد به یکدیگر ساخته می‌شوند، چند خانه‌ای می‌گویند. برای مثال، برای شکل زیر، سه شکل چندخانه‌ای (۴-خانه‌ای) هستند.
- ولی سه شکل زیر چندخانه‌ای (۴-خانه‌ای) نیستند.
- الف) همه ۴-خانه‌ای‌های غیر هم‌نهشت را رسم کنید.
- ب) کدام یک از ۴-خانه‌ای‌ها مرکز تقارن دارند؟
- ج) کدام یک از ۴-خانه‌ای‌ها محور تقارن دارند؟



الف) یک ۴-خانه‌ای، چهار مربع است که هر کدام دست‌کم یک ضلع کامل با مربع دیگر مشترک دارد. بر اساس بلندترین ردیف آنها را می‌شماریم:

- بلندترین ردیف ۴ خانه: فقط یک شکل (خط راست) — ۱.
- بلندترین ردیف ۳ خانه: خانه‌ی چهارم کنار یک خانه‌ی انتهایی یا کنار خانه‌ی وسط ردیف (بالا یا پایین) قرار می‌گیرد؛ کنار انتها شکل L و کنار وسط شکل T به دست می‌آید (قرینه‌ها را هم نهشت می‌گیریم).
- بلندترین ردیف ۲ خانه: مربع 2×2 — O — یا دو ردیف دوتایی که نیم‌خانه جابه‌جا شده‌اند (پله‌ای) — S.



از چپ به راست: ا، L، T، S، O. (بررسی کامل با رایانه هم دقیقاً ۵ شکل غیر هم نهشت داد.)
(ب) مرکز تقارن: ا، S و O (با نیم دور حول وسط شکل بر خودشان منطبق می شوند). T و L مرکز تقارن ندارند.
(ج) محور تقارن: ا (۲ محور)، T (۱ محور) و O (۴ محور). L و S محور تقارن ندارند.

پاسخ: الف) ۵ شکل (ا، L، T، S، O) ب) ا، S، O ج) ا، T، O

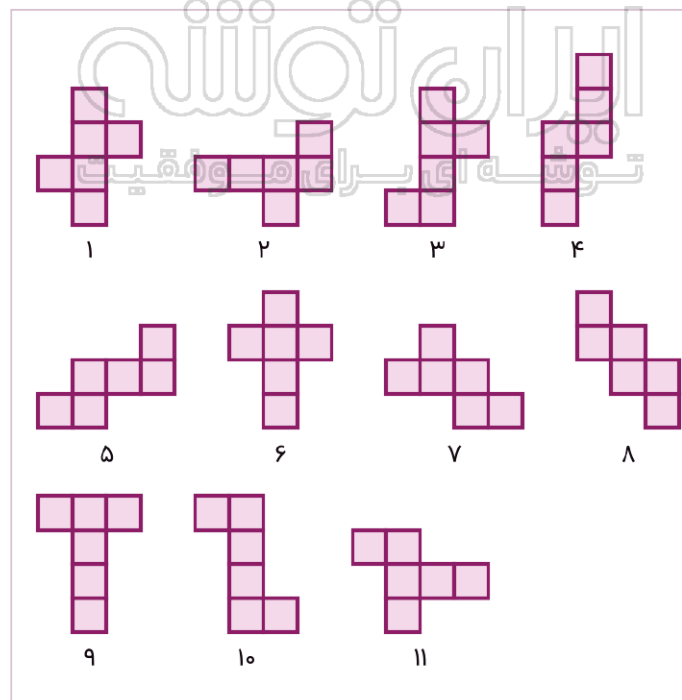
تمرین ۸

صفحه ۳۶

۸

۸. می دانیم که بازشده یک مکعب یک ۶-خانه ای است.
الف) همه ۶-خانه ای هایی را که باز شده یک مکعب هستند، رسم کنید.
ب) کدام یک از ۶-خانه ای های قسمت «الف» مرکز تقارن دارند؟
ج) کدام یک از ۶-خانه ای های قسمت «الف» محور تقارن دارند؟

الف) از میان ۳۵ شش خانه ای غیر هم نهشت، دقیقاً ۱۱ شکل بازشده ی مکعب اند (هر شکل را روی مکعب می غلتانیم؛ شکل وقتی بازشده ی مکعب است که شش وجه مکعب هر کدام دقیقاً یک بار روی خانه ها بیفتد). این ۱۱ شکل بر اساس بلندترین ردیف چنین دسته بندی می شوند: ۶ شکل با ردیف ۴ تایی و دو خانه ی دو سر ردیف در دو طرف مخالف، ۳ شکل با ردیف ۳ تایی و پله ای ۲-۳-۱، یک شکل ۲-۲-۲ (پله) و یک شکل ۳-۳.



ب) مرکز تقارن: شکل های ۱، ۴، ۸ و ۱۰ (در شماره گذاری شکل بالا).

ج) محور تقارن: شکل های ۶ و ۹.

پاسخ: الف) ۱۱ شکل ب) شکل های ۱، ۴، ۸، ۱۰ ج) شکل های ۶ و ۹

۹

صفحه ۳۶

تمرین ۹

۹. همهٔ عددهای فارسی دورقمی را بیابید که مرکز تقارن دارند.

اگر عددی مرکز تقارن داشته باشد، نیم دور آن عدد را بر خودش منطبق می کند. در این نیم دور، رقم سمت راست (چرخیده) جای رقم سمت چپ را می گیرد و برعکس؛ پس باید هر رقم با چرخیده ی رقم دیگر برابر باشد. رقم های فارسی که با نیم دور به یک رقم دیگر (یا به خودش) تبدیل می شوند: ۱ و ۰ به خودش؛ ۷ (شکل ۷) و ۸ (شکل ۸) به یکدیگر. بقیه ی رقم ها (۹، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲) با نیم دور به رقم فارسی دیگری تبدیل نمی شوند.

- ۱۱: هر دو رقم ۱ هستند و با نیم دور بر خودش منطبق اند.
- ۷۸ و ۸۷: نیم دور ۷ را به ۸ و ۸ را به ۷ می برد و جای آنها عوض می شود.
- عددهایی مثل ۱۰ مرکز تقارن ندارند (چرخیده ی ۰ برابر ۱ نیست) و ۰۰ عدد دورقمی نیست.

پاسخ: ۱۱، ۷۸ و ۸۷

۱۰

صفحه ۳۶

تمرین ۱۰

۱۰. فرض کنید دو شکل دارید که هر یک مرکز تقارن دارند.
الف) این شکل ها را طوری در یک صفحه قرار دهید که شکل جدید نیز مرکز تقارن داشته باشد.
ب) دربارهٔ تعداد روش های حل قسمت «الف» بحث کنید.

توشه ای برای موفقیت

الف) شکل ها را طوری روی هم می گذاریم که مرکز تقارن آنها بر هم منطبق شود. اگر نقطه ی O مرکز تقارن هر دو شکل باشد، قرینه ی هر نقطه از شکل اول و هر نقطه از شکل دوم نسبت به O باز در همان شکل است؛ پس قرینه ی هر نقطه ی شکل جدید (اجتماع دو شکل) نسبت به O در شکل جدید است و O مرکز تقارن شکل جدید می شود.

ب) کافی است مرکز دو شکل بر هم منطبق باشد؛ ولی هر شکل را می توان قبل از قرار دادن با هر زاویه ای حول مرکزش چرخاند و باز مرکزش همان نقطه می ماند. پس بی شمار روش وجود دارد. اگر دو شکل هم نهشت باشند، روش دیگری هم هست: آنها را نسبت به یک نقطه ی دلخواه قرینه ی هم قرار دهیم (به شرط هم پوشانی نداشتن)؛ آن نقطه مرکز تقارن شکل جدید می شود.

۱۱. در یک کاغذ شطرنجی، مثلثی با رأس‌های $P=(-۲,۳)$ ، $Q=(۱,۱)$ و $R=(-۲,۵)$ رسم کنید و دستورهایی زیر را در نظر بگیرید.

$\mathcal{A}$: تقارن نسبت به خط گذرنده از نقطه‌های $(۴,-۶)$ و $(۴,-۴)$.

$\mathcal{B}$: دوران ۱۸۰° در جهت عقربه‌های ساعت نسبت به نقطه $(۵,۱)$.

$\mathcal{C}$: تقارن نسبت به خط گذرنده از نقطه‌های $(۱۰,۱)$ و $(۳,۱)$.

در هر یک از قسمت‌های زیر دستورهایی داده شده را به ترتیب از چپ به راست برای مثلث PQR اجرا کنید. آیا شکل‌های به دست آمده در هر قسمت یکسان می‌شوند؟

الف) $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ب) $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$

ج) دستورهایی با دوران، تقارن و دوران بسازید و آنها را به ترتیب $\mathcal{D}$ ، $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ بنامید به طوری که $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ مثلث PQR را دو واحد بالا ببرد.

نقطه‌های داده شده $(۴,-۶)$ و $(۴,-۴)$ هر دو $x=۴$ دارند؛ پس $\mathcal{A}$ تقارن نسبت به خط عمودی $x=۴$ است $((x,y) \rightarrow (۸-x,y))$. نقطه‌های $(۱۰,۱)$ و $(۳,۱)$ هر دو $y=۱$ دارند؛ پس $\mathcal{C}$ تقارن نسبت به خط افقی $y=۱$ است $((x,y) \rightarrow (x,۲-y))$. دوران ۱۸۰° (چه ساعت‌گرد چه پادساعت‌گرد) نسبت به $(۵,۱)$ هر نقطه را به قرینه‌ی آن نسبت به $(۵,۱)$ می‌برد: $((x,y) \rightarrow (۱۰-x,۲-y))$.

الف) $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$

R	Q	P	
$(۵,۲-)$	$(۱,۱)$	$(۳,۲-)$	رأس‌های اولیه
$(۵,۱۰)$	$(۱,۷)$	$(۳,۱۰)$	پس از $\mathcal{A}$
$(۳-,۰)$	$(۱,۳)$	$(۱-,۰)$	پس از $\mathcal{B}$
$(۵,۰)$	$(۱,۳)$	$(۳,۰)$	پس از $\mathcal{C}$

ب) $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$

R	Q	P	
(۵, ۲-)	(۱, ۱)	(۳, ۲-)	رأس های اولیه
(۳-, ۱۲)	(۱, ۹)	(۱-, ۱۲)	پس از B
(۵, ۱۲)	(۱, ۹)	(۳, ۱۲)	پس از C
(۵, ۴-)	(۱, ۱-)	(۳, ۴-)	پس از A

نتیجه‌ی قسمت «الف» مثلثی با رأس‌های (۰, ۳)، (۳, ۱)، (۰, ۵) و نتیجه‌ی قسمت «ب» مثلثی با رأس‌های (۴, ۳)، (۱, ۱-)، (۴, ۵-) است. دو شکل هم‌اندازه‌اند ولی جایشان فرق دارد (دومی ۴ واحد سمت چپ اولی است)؛ پس یکسان نیستند.

ج) دوران جهت چرخش رأس‌ها ($P \rightarrow Q \rightarrow R$) را حفظ می‌کند ولی تقارن نسبت به خط آن را برعکس می‌کند. در دستور ساخته شده «دوران، تقارن، دوران» یک تقارن و دو دوران داریم؛ پس جهت چرخش رأس‌های مثلث در پایان برعکس می‌شود. بالا بردن مثلث (انتقال) جهت را حفظ می‌کند. مثلث PQR ضلع‌های ۲، $\sqrt{13}$ و ۵ دارد (مختلف‌الاضلاع)، پس تنها یک حرکت می‌تواند آن را روی مثلث دو واحد بالاتر بنشاند (انتقال) و هیچ «دوران، تقارن، دوران»ی چنین کاری نمی‌کند. بنابراین دستوری با این ترکیب وجود ندارد. (با دو تقارن، یا دو دوران 180° ، این کار شدنی است؛ مثلاً: تقارن نسبت به $y=0$ و سپس نسبت به $y=1$ ، یا دوران 180° نسبت به (۰, ۰) و سپس نسبت به (۰, ۱).)

پاسخ: الف و ب یکسان نیستند. ج) با ترکیب «دوران، تقارن، دوران» ممکن نیست (جهت چرخش رأس‌ها)؛ با دو تقارن یا دو دوران ممکن است

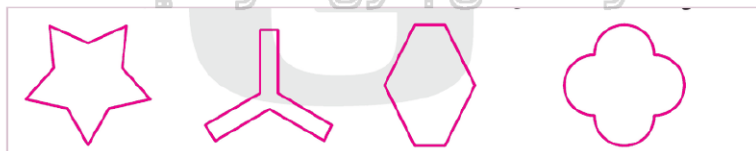


تمرین ۱۲

صفحه ۳۷

۱۲

۱۲. شکل‌های زیر را بر اساس تعداد محور تقارن از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



تعداد محورهای هر شکل (از چپ به راست در شکل کتاب):

- ستاره‌ی پنج‌پر: ۵ محور؛ هر محور از یک نوک و وسط فرورفتگی روبه‌رو می‌گذرد.
- شکل سه‌پر (۲): ۳ محور؛ هر محور در امتداد یک پره می‌گذرد.
- شش ضلعی کشیده: ۲ محور؛ یک محور افقی و یک محور عمودی (این شش ضلعی منتظم نیست و قطرهای دیگر محور نیستند).
- شکل چهاربرگ (گل‌مانند): ۴ محور؛ دو محور از وسط برگ‌های روبه‌رو و دو محور از فرورفتگی‌های روبه‌رو.

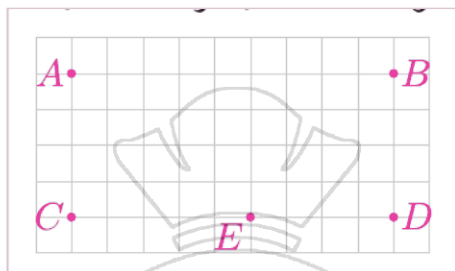
پاسخ (از کوچک به بزرگ): شش ضلعی کشیده (۲) ← شکل سه پر (۳) ← شکل چهاربرگ (۴) ← ستاره‌ی پنج پر (۵)

تمرین ۱

صفحه ۳۷

۱۳

۱. باتوجه به شکل زیر، نقاط خواسته شده در هر قسمت را مشخص کنید.
- الف) چند نقطه مانند F، روی پاره خط AB هست که $\widehat{BFE}$ و $\widehat{DEF}$ مکمل شوند؟
- ب) چند نقطه مانند G، روی پاره خط AB هست که $\widehat{BGE}$ و $\widehat{DEG}$ برابر شوند؟



در شکل، نقطه‌های C، E و D روی یک خط افقی شبکه‌اند و AB هم افقی است؛ پس $ED \parallel AB$. برای هر نقطه‌ی F روی AB، خط EF این دو خط موازی را قطع می‌کند و زاویه‌های $\widehat{DEF}$ و $\widehat{BFE}$ دو زاویه‌ی هم‌طرف درونی (داخلی و هم‌طرف) هستند.

الف) مجموع دو زاویه‌ی هم‌طرف درونی بین دو خط موازی همیشه 180° است؛ یعنی برای هر نقطه‌ی F روی AB، زاویه‌های $\widehat{DEF}$ و $\widehat{BFE}$ مکمل‌اند. پس بی‌شمار نقطه (همه‌ی نقطه‌های AB).

ب) برای G روی AB داریم $\widehat{DEG} + \widehat{BGE} = 180^\circ$. اگر این دو زاویه برابر باشند، هر کدام 90° است؛ یعنی $EG \perp AB$. پای عمود وارد از E بر AB تنها یک نقطه است (نقطه‌ی بالای E در شبکه، ۵ خانه‌ی سمت راست A) و برای آن واقعاً هر دو زاویه 90° می‌شوند. پس فقط یک نقطه.

پاسخ: الف) بی‌شمار (همه‌ی نقطه‌های AB) ب) فقط یک نقطه (پای عمود از E بر AB)

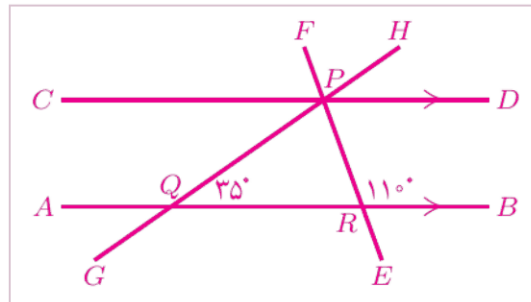
تمرین ۲

صفحه ۳۸

۱۴

۲. در شکل روبه‌رو،
- الف) کدام زاویه‌ها برابر 35° است؟

ب) کدام زاویه‌ها برابر 110° است؟



در شکل $CD \parallel AB$ ، خط GH دو خط را در P و Q و خط FE آنها را در R و P قطع می‌کند. زاویه‌ی 35° همان $\angle PQB$ و زاویه‌ی 110° همان $\angle PRB$ است.

الف) زاویه‌های برابر 35° :

- ☐ $35^\circ = \angle PQB$ (داده).
- ☐ $35^\circ = \angle AQP$ (متقابل به رأس با $\angle PQB$).
- ☐ $35^\circ = \angle HPD$ (متناظر با $\angle PQB$ ، چون $CD \parallel AB$ و خط GH آنها را قطع کرده است).
- ☐ $35^\circ = \angle CPQ$ (متقابل به رأس با $\angle HPD$).

ب) زاویه‌های برابر 110° :

- ☐ $110^\circ = \angle PRB$ (داده).
- ☐ $110^\circ = \angle ERA$ (متقابل به رأس با $\angle PRB$).
- ☐ $110^\circ = \angle FPD$ (متناظر با $\angle PRB$ ، با خط FE به عنوان مورب).
- ☐ $110^\circ = \angle RPD$ (متقابل به رأس با $\angle FPD$).

(بررسی: زاویه‌ی $\angle QPR$ در مثلث PQR برابر $75^\circ = (180^\circ - 110^\circ) - 35^\circ = 180^\circ - 110^\circ - 35^\circ$ است و با $\angle FPH = \angle FPD - \angle HPD = 110^\circ - 35^\circ = 75^\circ$ (متقابل به رأس) سازگار است.)

نوشته‌ای برای موفقیت

پاسخ: الف) $\angle PQB, \angle HPD, \angle AQP, \angle PRB$ ب) $\angle RPD, \angle FPD, \angle ERA, \angle PRB$

تمرین ۳

صفحه ۳۸

۱۵

۳. درباره‌ی درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر بحث کنید.

«اگر دو ضلع یک زاویه با دو ضلع زاویه‌ای دیگر موازی باشند، آنگاه آن دو زاویه با هم برابرند.»

جمله **نادرست** است. مثال نقض: متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با $A=(0,0)$ ، $B=(4,0)$ ، $C=(5,3)$ ، $D=(1,3)$ را بگیرید. دو ضلع زاویه‌ی $\hat{A}$ یعنی AB و AD با دو ضلع زاویه‌ی $\hat{B}$ یعنی BA (روی همان خط AB) و BC ($BC \parallel AD$) موازی‌اند، ولی $\hat{A} \approx 71,6^\circ$ و $\hat{B} \approx 108,4^\circ$ برابر نیستند؛ مجموع آنها 180° است (زاویه‌های هم‌طرف درونی).

جمله‌ی درست: اگر دو ضلع یک زاویه با دو ضلع زاویه‌ی دیگر موازی باشند، آن دو زاویه یا **برابرند** (وقتی هر دو ضلع هم‌جهت یا هر دو خلاف‌جهت باشند) یا **مکمل‌اند** (وقتی فقط یکی از ضلع‌ها خلاف‌جهت باشد).

پاسخ: جمله نادرست است؛ دو زاویه برابرند یا مکمل (مثال نقض: دو زاویه‌ی مجاور در متوازی‌الاضلاع)

تمرین ۴

صفحه ۳۸

۱۶

۴. عبارات‌های نوشته شده در کادرهای زیر، همواره درست‌اند. نوشته‌های این دو کادر چه تفاوتی با یکدیگر دارند؟

کادر اول: «اگر خط d دو خط موازی l_1 و l_2 را قطع کند و زاویه‌های A_1 و B_1 را پدید آورد، آنگاه $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ »
کادر دوم: «اگر خط d دو خط l_1 و l_2 را قطع کند و زاویه‌های A_1 و B_1 پدید آیند به‌طوری‌که $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ، آنگاه l_1 و l_2 موازی‌اند.»

در هر دو جمله دو خط، یک مورب و دو زاویه‌ی هم‌جایگاه ($\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$) متناظر داریم. تفاوت در «فرض» و «حکم» است که جایشان عوض شده است:

○ **جمله‌ی کادر اول:** فرض: $l_1 \parallel l_2$ (در شکل با فلش نشان داده شده)؛ حکم: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$. یعنی از موازی بودن، برابری زاویه‌های متناظر نتیجه می‌شود.

○ **جمله‌ی کادر دوم:** فرض: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ؛ حکم: $l_1 \parallel l_2$. یعنی از برابری زاویه‌های متناظر، موازی بودن نتیجه می‌شود.

جمله‌ی دوم، **عکس** جمله‌ی اول است. اولی برای «به دست آوردن زاویه‌ها وقتی موازی بودن را می‌دانیم» و دومی برای «اثبات موازی بودن وقتی زاویه‌ها برابرند» به کار می‌رود.

پاسخ: فرض و حکم دو جمله جابه‌جا شده‌اند؛ جمله‌ی دوم عکس جمله‌ی اول است

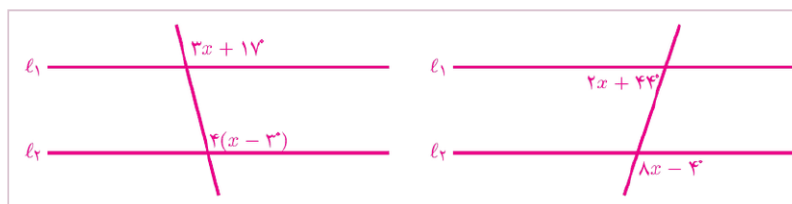
توشه‌ای برای موفقیت

تمرین ۵

صفحه ۳۸

۱۷

۵. در هر یک از شکل‌های زیر، x چقدر باشد که داشته باشیم $l_1 \parallel l_2$ ؟



شکل سمت چپ (در کتاب): هر دو زاویه‌ی $3x + 17^\circ$ و $4(x - 3)^\circ$ بالای خط و سمت راست مورب‌اند؛ یعنی زاویه‌های **متناظر**. موازی بودن l_1 و l_2 یعنی این دو زاویه برابر باشند:

$$x = 29 \Rightarrow 3x + 17 = 4x - 12 \Rightarrow 3x + 17 = 4(x - 3)$$

$$\text{بررسی: } 4 \times (29 - 3) = 104 \text{ و } 3 \times 29 + 17 = 104$$

شکل سمت راست: زاویه ی $2x + 44^\circ$ زیر l_1 و سمت چپ مورب (درونی) و زاویه ی $8x - 4^\circ$ زیر l_2 و سمت راست مورب است. زاویه ی $8x - 4^\circ$ با زاویه ی بالای l_2 و سمت چپ مورب متقابل به رأس است و این زاویه با $2x + 44^\circ$ هر دو درونی و هم طرف اند. برای موازی بودن باید مجموعشان 180° باشد:

$$x = 14 \Rightarrow 10x + 40 = 180 \Rightarrow (2x + 44) + (8x - 4) = 180$$

$$\text{بررسی: } 72 = 2 \times 14 + 44 \text{ و } 108 = 8 \times 14 - 4$$

پاسخ: شکل چپ $x=29$ ؛ شکل راست $x=14$

تمرین ۶

صفحه ۳۹

۱۸

۶. باتوجه به شکل، کدام خطوط موازی اند اگر،

(الف) $a=90^\circ$ ، $f=68^\circ$ و $c=68^\circ$.

(ب) $b=42^\circ$ ، $d=90^\circ$ و $c=48^\circ$.

(ج) $b=46^\circ$ ، $e=46^\circ$ و $f=54^\circ$.

(الف) f و c نسبت به مورب l_5 متبادل اند و $f=c=68^\circ$ ؛ پس $l_3 \parallel l_4$. (از $a=90^\circ$ هم نتیجه می شود $l_2 \perp l_3$ و $l_2 \perp l_4$).

(ب) $b+c = 42^\circ + 48^\circ = 90^\circ$ ؛ پس $l_4 \perp l_2$ ؛ از $d=90^\circ$ هم $l_4 \perp l_1$. دو خط عمود بر یک خط موازی اند: $l_1 \parallel l_2$.

(ج) b و e نسبت به مورب l_5 متبادل اند و $b=e=46^\circ$ ؛ پس $l_1 \parallel l_2$. ($f=54^\circ$ خط موازی دیگری نتیجه نمی دهد).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

توشه ای برای موفقیت

تمرین ۷

صفحه ۳۹

۱۹

۷. باتوجه به شکل، ثابت کنید:

(الف) $PQ \parallel AB$

(ب) $AC \parallel RQ$

(ج) $PS \parallel CB$

طبق علامت های شکل: زاویه ی A با زاویه ی QRB و زاویه ی B با زاویه های PQC و QPS برابرند.

(الف) زاویه های PQC و B برابرند و نسبت به خط های PQ و AB و مورب BC هم ارزند؛ پس $PQ \parallel AB$.

(ب) زاویه های A و QRB نسبت به خط های AC و RQ و مورب AB هم ارزند و برابرند؛ پس $AC \parallel RQ$.

ج) زاویه های QPS و PQC نسبت به خط های PS و CB و مورب PQ متبادل اند و برابرند؛ پس $PS \parallel CB$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰

صفحه ۳۹

تمرین ۸

۸. در چهارضلعی ABCD، زاویه های A و B مکمل اند. همچنین زاویه های A و D مکمل اند. ثابت کنید $AB \parallel DC$ ، $\hat{A} = \hat{C}$ و $AD \parallel BC$.

فرض: $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ و $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$.

۱. خط AB دو خط AD و BC را قطع کرده است و زاویه های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ هم طرف درونی اند و مجموعشان 180° است؛ پس $AD \parallel BC$ (عکس قضیه ی زاویه های هم طرف درونی).
۲. خط AD دو خط AB و DC را قطع کرده است و زاویه های $\hat{A}$ و $\hat{D}$ هم طرف درونی اند و مجموعشان 180° است؛ پس $AB \parallel DC$.
۳. مجموع زاویه های هر چهارضلعی 360° است: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$. چون $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ ، پس $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$ و در نتیجه $\hat{C} = 180^\circ - \hat{D}$.
۴. از فرض دوم $\hat{A} = 180^\circ - \hat{D}$. پس $\hat{A} = \hat{C}$.

نتیجه: $AB \parallel DC$ ، $AD \parallel BC$ و $\hat{A} = \hat{C}$ ■

۲۱

صفحه ۳۹

تمرین ۹

۹. اگر $A=(1,5)$ ، $B=(2,5)$ ، $C=(3,5)$ ، $D=(4,5)$ ، $E=(5,5)$ و $O=(0,0)$ ، $P=(1,0)$ ، آنگاه مقدار عبارت زیر را به دست آورید.

$$\hat{OAP} + \hat{OBP} + \hat{OCP} + \hat{ODP} + \hat{OEP}$$

هر نقطه ی $A_1=A$ ، $\dots$ ، $A_5=E$ را $A_i=(i,5)$ بنامید و $A_0=(0,5)$ هم در نظر بگیرید. چون $P=O+(1,0)$ و $A_i=A_{i-1}+(1,0)$ ، انتقال به اندازه ی $(1,0)$ پاره خط OA_{i-1} را به PA_i می برد؛ پس $PA_i \parallel OA_{i-1}$ و $\hat{PA_i} = \hat{OA_{i-1}}$. خط OA_i دو خط موازی OA_{i-1} و PA_i را قطع کرده است؛ پس $\hat{OAP} = \hat{OA_i}$ (بین OA_i و PA_i) و $\hat{OA_i} = \hat{OA_{i-1}}$ (بین OA_i و OA_{i-1}) و زاویه های متبادل داخلی اند و برابرند:

$$\hat{OAP} = \hat{OA_i} = \hat{OA_{i-1}}$$

پس مجموع خواسته شده برابر است با

$$\hat{OA_0} + \hat{OA_1} + \hat{OA_2} + \hat{OA_3} + \hat{OA_4} + \hat{OA_5} = \hat{OA_5}$$

زاویه $\hat{A}_5$ بین OA_0 (که با محور y ها منطبق است) و OA_5 قرار دارد. مثلث OA_0A_5 : $A_0=(0,5)$, $A_5=(5,5)$, $\hat{A}_0 = 90^\circ$ و $A_0A_5 = A_0O = 5$ پس قائم الزاویه متساوی الساقین است و $\hat{A}_5 = 45^\circ$.

پاسخ: 45°

تمرین ۱۰

صفحه ۳۹

۲۲

۱۰. یک توپ بلیارد روی نقطه‌ای از میز مستطیلی شکل بلیارد قرار دارد. به این توپ ضربه‌ای زده است. بررسی کنید که پس از چندبار برخورد توپ با دیواره‌های میز، مسیر توپ با مسیر اولیه‌اش موازی می‌شود.

قانون بازتاب: توپ با همان زاویه‌ای که به دیوار می‌خورد از آن دور می‌شود؛ یعنی مؤلفه‌ی حرکت در امتداد دیوار تغییر نمی‌کند و مؤلفه‌ی عمود بر دیوار برعکس می‌شود. میز را طوری در صفحه‌ی مختصات می‌گذاریم که ضلع‌های موازی محورها باشند و جهت حرکت توپ را با بردار (a,b) نشان می‌دهیم.

○ برخورد با دیوار افقی (موازی محور x ها): $(a,b) \rightarrow (a,-b)$.

○ برخورد با دیوار عمودی (موازی محور y ها): $(a,b) \rightarrow (-a,b)$.

توپ پس از هر برخورد فقط به دیوار دیگری می‌خورد؛ پس دو برخورد پشت سرهم دو حالت دارد:

○ دو دیوار مجاور (یکی افقی و یکی عمودی): $(a,b) \rightarrow (a,-b) \rightarrow (-a,-b)$. بردار $(-a,-b)$ در خلاف جهت (a,b) و موازی آن است.

○ دو دیوار روبه‌رو (هر دو افقی یا هر دو عمودی): $(a,b) \rightarrow (a,-b) \rightarrow (a,b)$. جهت اولیه برمی‌گردد.

در هر دو حالت، پس از دو برخورد متوالی مسیر توپ با مسیر اولیه‌اش موازی می‌شود (در حالت اول خلاف جهت، در حالت دوم هم جهت). (فرض: توپ دقیقاً به گوشه‌ی میز نمی‌خورد.)

پاسخ: پس از ۲ برخورد پیاپی با دیواره‌ها، مسیر توپ با مسیر اولیه موازی می‌شود

توشه‌ای برای موفقیت

تمرین ۱۱

صفحه ۴۰

۲۳

۱۱. روی یک نوار کاغذی مستطیلی، زاویه‌ای به اندازه x داریم. (شکل ۱)

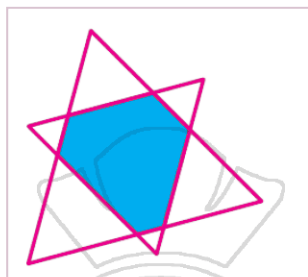
ابتدا نوار را روی ضلع زاویه تا می‌زنیم (شکل ۲).

سپس آن را از پشت تا می‌زنیم (شکل ۳). اگر زاویه‌ای که در شکل آخر تشکیل می‌شود 40° درجه باشد، آنگاه x چقدر است؟

در تای اول، نوار نسبت به خط تا، بازتاب می‌شود؛ پس لبه‌ی نوار تا شده با لبه‌ی اولیه زاویه‌ی $2x$ می‌سازد. در تای دوم (از پشت) نوار نسبت به لبه‌ی افقی بازتاب می‌شود و زاویه‌ی نهایی با لبه‌ی افقی برابر $180^\circ - 2x$ است.

$$x = 70^\circ \implies 2x = 140^\circ \implies 180^\circ - 2x = 40^\circ$$

۱۲. دو مثلث متساوی الاضلاع به ضلع‌های a و b طوری روی هم قرار گرفته‌اند که هر ضلع مثلث اول با یکی از اضلاع مثلث دوم موازی است. محیط شش ضلعی آبی را برحسب a و b به دست آورید.



شش ضلعی آبی را $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ می‌نامیم (ضلع‌ها به ترتیب دور شش ضلعی). ضلع‌های x_1, x_3, x_5 روی ضلع‌های مثلث اول و x_2, x_4, x_6 روی ضلع‌های مثلث دوم‌اند. چون ضلع‌های دو مثلث دوجه دو موازی‌اند، همه‌ی زاویه‌های شش ضلعی 120° است.

هر رأس مثلث اول، یک مثلث کوچک بیرون شش ضلعی جدا می‌کند. این مثلث کوچک دو ضلع از مثلث اول و یک ضلع روی خطی از مثلث دوم دارد، با زاویه‌ی 60° در رأس و دو زاویه‌ی 60° دیگر (چون ضلع‌ها موازی‌اند)، پس متساوی الاضلاع است و اندازه‌ی ضلع‌هایش برابر ضلع شش ضلعی روی مثلث دوم است. بنابراین طول هر ضلع مثلث اول، مجموع یک ضلع شش ضلعی و دو ضلع مجاور آن است:

$$a = x_4 + x_5 + x_6, a = x_2 + x_3 + x_4, a = x_6 + x_1 + x_2$$

جمع این سه تساوی: $3a = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + (x_2 + x_4 + x_6) + (x_1 + x_3 + x_5)$ به همین ترتیب برای مثلث دوم: $3b =$

$$(x_1 + \dots + x_6) + (x_1 + x_3 + x_5)$$

$$a+b = \text{محیط} \Rightarrow 3(a+b) = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$

پاسخ: محیط شش ضلعی برابر $a+b$ است

۱. حسن یک مثلث داشت. او یک ضلع مثلثش را به آینه چسباند و یک مربع تشکیل شد! مثلث حسن چه خاصیتی دارد؟

مثلث ABC و آینه روی ضلع AB است. مثلث و قرینه‌اش (ABC') یک چهارضلعی ACBC' می‌سازند که نسبت به AB متقارن است. در رأس A زاویه‌ی این چهارضلعی $\hat{A}$ ۲ است.

۱. اگر $\hat{A} = 90^\circ$ ، زاویه‌ی چهارضلعی در A برابر 180° و رأس نیست و شکل یک مثلث می‌شود، نه مربع. اگر $\hat{A} > 90^\circ$ ، زاویه از 180° بیشتر است و شکل مربع نیست. پس برای مربع شدن باید $\hat{A} = 90^\circ$ یعنی $\hat{A} = 45^\circ$.

۲. همین استدلال برای B می‌دهد $\hat{B} = 45^\circ$ ؛ پس $\hat{C} = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ و مثلث متساوی‌الساقین است ($CA = CB$) چون زاویه‌های روبه‌رو برابرند).

۳. برعکس، مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین را روی وترش به آینه بچسبانیم، چهار ضلع برابر ($CA = CB = C'A = C'B$) و چهار زاویه‌ی 90° داریم: مربع.

پاسخ: مثلث حسن قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است (زاویه‌ها 90° ، 45° ، 45°) و او وتر را به آینه چسبانده است

۲. الف) آیا یک چهارضلعی غیر از مربع وجود دارد که چهار محور تقارن داشته باشد؟ ب) آیا شکلی غیر از مربع وجود دارد که چهار محور تقارن داشته باشد؟

الف) محور تقارن چهارضلعی ABCD رأس‌ها را به رأس‌ها می‌برد و مجاورها را مجاور نگه می‌دارد. بنابراین یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد (حالت‌های دیگر ناممکن‌اند):

- محور از دو رأس روبه‌رو می‌گذرد (یعنی روی یک قطر است؛ دو رأس دیگر نسبت به آن قرینه‌اند).
- محور عمودمنصف دو ضلع روبه‌رو است (رأس‌ها دوه‌دو جابه‌جا می‌شوند).

چهارضلعی فقط ۲ قطر و ۲ جفت ضلع روبه‌رو دارد؛ پس حداکثر ۲ محور از نوع اول و حداکثر ۲ محور از نوع دوم. برای ۴ محور باید هر چهار نوع وجود داشته باشد: اگر هر دو قطر محور باشند، $AB=AD$ ، $CB=CD$ و $DA=DC$ ، $BA=BC$ ، یعنی چهار ضلع برابر (لوزی). اگر عمودمنصف هر دو جفت ضلع روبه‌رو محور باشد، چهار زاویه برابرند و هر کدام 90° است (مستطیل). لوزی و مستطیل هم‌زمان یعنی مربع. پس هر چهارضلعی با ۴ محور مربع است.

ب) بله. مثلاً علامت جمع (+) که از پنج مربع واحد ساخته شده است (یک ۱۲ ضلعی با رأس‌های $(۱,۰)$ ، $(۲,۰)$ ، $(۰,۱)$ ، $(۰,۲)$ ، $(۱,۲)$ ، $(۲,۳)$ ، $(۳,۲)$ ، $(۳,۱)$ ، $(۲,۱)$) چهار محور تقارن دارد: خط‌های $x=۱,۵$ ، $y=۱,۵$ و دو خط $y=x$ و $y=۳-x$. هشت ضلعی منتظم (۸ محور) و دایره (بی‌شمار محور) هم نمونه‌اند.

پاسخ: الف) خیر ب) بله (مثلاً علامت جمع، هشت ضلعی منتظم یا دایره)

تمرین ۳

صفحه ۴۱

۲۷

۳. یک چهارضلعی به غیر از لوزی مثال بزنید که قطرهای آن بر هم عمود باشند.

بادبادک ABCD با $A=(۰,۲)$ ، $B=(-۱,۰)$ ، $C=(۰,-۱)$ ، $D=(۱,۰)$. قطر AC روی محور yها (عمودی) و قطر BD روی محور xها (افقی) است؛ پس $AC \perp BD$. ضلع‌ها: $AB = AD = \sqrt{(1^2+2^2)} = \sqrt{۵}$ و $CB = CD = \sqrt{(1^2+1^2)} = \sqrt{۲}$ ؛ چون $\sqrt{۵} \neq \sqrt{۲}$ ، همه‌ی ضلع‌ها برابر نیستند و شکل لوزی نیست.

پاسخ: بادبادک با رأس‌های $(۱,۰)$ ، $(۰,-۱)$ ، $(-۱,۰)$ ، $(۰,۲)$ (بادبادک غیر لوزی)

تمرین ۴

صفحه ۴۱

۲۸

۴. یک چهارضلعی داریم که قطر محور تقارنش است. ثابت کنید قطرهای این چهارضلعی برهم عمودند.

فرض کنید چهارضلعی ABCD و قطر AC محور تقارن آن باشد. با قرینه‌سازی نسبت به AC، رأس‌های چهارضلعی به رأس‌های آن می‌روند. دو رأس A و C روی محورند و ثابت می‌مانند. رأس B روی محور نیست (وگرنه A، B و C روی یک خط می‌شدند) و قرینه‌ی آن باید رأسی از چهارضلعی باشد که مجاور A است و با B برابر نیست؛ پس D است. یعنی D قرینه‌ی B نسبت به خط AC است؛ پس AC عمودمنصف پاره‌خط BD است و در نتیجه $AC \perp BD$. ■

تمرین ۵

صفحه ۴۱

۲۹

۵. آیا می‌توانید یک چهارضلعی به غیر از مربع مثال بزنید که قطرهای آن باهم برابر و برهم عمود باشند؟

بله. چهارضلعی ABCD با $A=(-۱,۰)$ ، $B=(۰,۲)$ ، $C=(۳,۰)$ ، $D=(۰,-۲)$: قطر AC افقی به طول ۴ و قطر BD عمودی به طول ۴ است؛ پس برابر و برهم عمودند. ضلع‌ها: $AB = AD = \sqrt{۵}$ و $CB = CD = \sqrt{۱۳}$ که برابر نیستند؛ پس مربع نیست (بادبادک است). (در مربع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند، ولی در این شکل AC از وسط BD می‌گذرد ولی AC BD را نصف نمی‌کند.)

پاسخ: بله؛ مثلاً بادبادک با رأس‌های $(-1,0)$ ، $(0,2)$ ، $(3,0)$ ، $(0,-2)$

تمرین ۶

صفحه ۴۱

۳۰

۶. یک چهارضلعی به غیر از متوازی‌الاضلاع مثال بزنید که دو جفت ضلع برابر داشته باشد.

بادبادک با رأس‌های $(1,0)$ ، $(0,-1)$ ، $(-1,0)$ ، $(0,2)$: دو ضلع مجاور $\sqrt{5}$ و دو ضلع مجاور دیگر $\sqrt{2}$ است (دو جفت ضلع برابر). متوازی‌الاضلاع نیست، چون در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند ولی اینجا ضلع‌های روبه‌رو $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ هستند.

پاسخ: بادبادک (غیرلوزی)

تمرین ۷

صفحه ۴۱

۳۱

۷. یک چهارضلعی با دو جفت ضلع برابر و قطرهای عمود برهم و دو زاویه قائمه مثال بزنید که مربع نباشد.

بادبادک ABCD با $A=(0,0)$ ، $B=(1,2)$ ، $C=(5,0)$ ، $D=(1,-2)$.

- ضلع‌ها: $AB = AD = \sqrt{5}$ و $CB = CD = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ؛ دو جفت ضلع برابر.
- قطرهای AC روی محور x ها و BD روی خط $x=1$ (عمودی)؛ پس عمود برهم‌اند.
- زاویه‌ی $\hat{B}$: بردارهای $BA=(-1,-2)$ و $BC=(4,-2)$ ، حاصل ضرب داخلی $(-1)(4)+(-2)(-2)=0$ ؛ پس $\hat{B} = 90^\circ$ به همین ترتیب $\hat{D} = 90^\circ$. دو زاویه‌ی قائمه.
- مربع نیست، چون ضلع‌های مجاورش $\sqrt{5}$ و $2\sqrt{5}$ برابر نیستند.

پاسخ: بادبادک با رأس‌های $(0,0)$ ، $(1,2)$ ، $(5,0)$ ، $(1,-2)$

تمرین ۸

صفحه ۴۱

۳۲

۸. یک چهارضلعی با دو ضلع موازی، دو ضلع مساوی و دو جفت زاویه برابر مثال بزنید که متوازی‌الاضلاع نباشد.

دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ABCD با $A=(0,0)$ ، $B=(6,0)$ ، $C=(5,3)$ ، $D=(1,3)$.

- $AB \parallel DC$ (هر دو افقی).
- $BC = AD = \sqrt{(1^2+3^2)} = \sqrt{10}$ (ساق‌های برابر).
- $\hat{A} = \hat{B}$ و $\hat{C} = \hat{D}$ (زاویه‌های مجاور هر قاعده برابرند: $\hat{A} = \hat{B} \approx 71,6^\circ$ و $\hat{C} = \hat{D} \approx 108,4^\circ$).

○ متوازی الاضلاع نیست، چون قاعده‌ها ۶ و ۴ برابر نیستند.

پاسخ: دوزنقه‌ی متساوی الساقین

تمرین ۹

صفحه ۴۱

۳۳

۹. در یک چهارضلعی دو قطر برهم عمودند. تعداد محورهای تقارن این چهارضلعی چه اعدادی می‌تواند باشد؟ برای هر عدد یک مثال بیاورید.

ابتدا نشان می‌دهیم ۳ محور ممکن نیست. (استدلال تمرین ۲): هر محور یا روی یک قطر است یا عمودمنصف دو ضلع روبه‌روست؛ حداکثر ۲ محور از هر نوع. سه محور یعنی (۲ قطر + ۱ عمودمنصف) یا (۱ قطر + ۲ عمودمنصف):

○ دو قطر محور $\Rightarrow$ چهار ضلع برابر (لوزی): عمودمنصف ضلع AB هم محور باشد یعنی $\hat{A} = \hat{B}$ ؛ در لوزی $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ پس $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ و شکل مربع است که ۴ محور دارد، نه ۳.

○ دو عمودمنصف محور $\Rightarrow$ هر چهار زاویه برابرند و 90° است (مستطیل): یک قطر هم محور باشد یعنی $AB = AD$ و مستطیل مربع است (۴ محور).

پس هر چهارضلعی با ۳ محور، ۴ محور هم دارد؛ ۳ ممکن نیست. اعداد ممکن: ۰، ۱، ۲، ۴:

تعداد محور	مثال (قطرها عمودند)	رأس‌ها
۰	چهارضلعی نامتقارن	$(1, 0), (0, 2), (3, 0), (1, -1)$
۱	بادبادک (غیرلوزی)	$(1, 0), (1, -1), (0, 2), (0, 0)$
۲	لوزی (غیرمربع)	$(3, 0), (2, -1), (0, 2), (0, 0)$
۴	مربع	$(0, 1), (1, 1), (1, 0), (0, 0)$

(در هر چهار مثال قطرها برهم عمودند. مستطیل غیرمربع قطر عمود ندارد، پس نمونه‌ی «۲ محور» لوزی است.)

پاسخ: ۰، ۱، ۲ یا ۴ محور (۳ محور ممکن نیست)

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



۱۰. ثابت کنید که اگر یک متوازی‌الاضلاع محور تقارن داشته باشد، آن متوازی‌الاضلاع یا مستطیل است و یا لوزی.

متوازی‌الاضلاع ABCD با محور تقارن l را در نظر بگیرید. طبق استدلال تمرین ۲، l دو حالت دارد:

○ l روی یک قطر است، مثلاً AC : B و D قرینه‌ی هم‌اند، پس $AB = AD$. در متوازی‌الاضلاع $AB = CD$ و $AD = BC$; پس هر چهار ضلع برابرند: لوزی.

○ l عمودمنصف دو ضلع روبه‌رواست، مثلاً AB و CD (به‌طوری‌که A و B قرینه‌ی هم‌اند): $\hat{A} = \hat{B}$. در متوازی‌الاضلاع $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ (هم‌طرف درونی); پس $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ و زاویه‌های مقابل هم 90° هستند: مستطیل.

(حالت قطر BD و حالت عمودمنصف BC و AD مشابه‌اند.) پس متوازی‌الاضلاع دارای محور، مستطیل یا لوزی است. ■

۱. نازنین برای اینکه ثابت کند مجموع زاویه‌های هر مثلث 180° درجه است، یک مثلث کاغذی ساخت و ارتفاع آن را رسم کرد. سپس رأسی را که ارتفاع از آن رسم شده بود، روی پای ارتفاع گذاشت و کاغذ را تا زد. سپس هر یک از دو رأس دیگر مثلث را نیز روی پای ارتفاع رسم شده گذاشت و کاغذ را تا زد. درباره‌ی درستی روش نازنین بحث کنید.

مثلث و تاها: مثلث ABC، ارتفاع AH (روی BC). تا اول: A را روی H می‌گذاریم؛ خط تا، عمودمنصف AH و موازی BC است و زاویه‌ی $\hat{A}$ با همان اندازه در H قرار می‌گیرد (تا زدن زاویه را حفظ می‌کند). تا دوم و سوم: B و C را روی H می‌گذاریم؛ خط‌های تا عمودمنصف BH و HC (عمود بر BC) هستند و زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هم با همان اندازه در H قرار می‌گیرند.

سه زاویه‌ی $\hat{A}$ و $\hat{C}$ در نقطه‌ی H کنار هم قرار می‌گیرند: ضلع اول زاویه‌ی $\hat{B}$ روی خط BC (به سمت B) است، ضلع مشترک $\hat{B}$ و $\hat{A}$ پاره‌خط HD، ضلع مشترک $\hat{A}$ و $\hat{C}$ پاره‌خط HE و ضلع آخر $\hat{C}$ روی BC (به سمت C) است. چون دو ضلع بیرونی روی یک خط راست‌اند و زاویه‌ها بدون فاصله و هم‌پوشانی کنار هم‌اند، مجموعشان یک زاویه‌ی نیم‌صفحه یعنی 180° است.

نتیجه‌ی بحث: روش نازنین درست است، به شرط آنکه پای ارتفاع H درون ضلع BC باشد (تا B و C هر دو بتوانند روی H تا شوند). این شرط وقتی همیشه برقرار است که ارتفاع را بر **بلندترین ضلع** رسم کنیم (زاویه‌های دو سر بلندترین ضلع حاده‌اند). اگر ارتفاعی از رأس یک مثلث منفرجه به ضلع کوتاه رسم شود، پای ارتفاع بیرون مثلث است و روش کار نمی‌کند. همچنین این روش یک نمایش تجربی است و برای اثبات، همان استدلال‌های بالا (تا زدن زاویه‌ها را حفظ می‌کند، خط‌های تا موازی و عمودند) لازم است.

پاسخ: روش درست است به شرط آنکه ارتفاع بر بلندترین ضلع رسم شود (پای ارتفاع درون ضلع باشد)

تمرین ۲

صفحه ۴۲

۳۶

۲. هادی و هدی می‌خواستند ثابت کنند مجموع زاویه‌های مثلث 180° درجه است.

راه‌حل هادی: $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_2$ ، $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_2 \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$ (شکل: مثلث ABC با امتداد BC از C).

راه‌حل هدی: از A خطی رسم شده است؛ $\hat{A}_2 = \hat{B}$ ، $\hat{A}_3 = \hat{C}$ ، $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

هر دو راه‌حل بالا ایراد دارند. در صورت امکان آنها را اصلاح کنید.

ایراد راه‌حل هادی: او از $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_2$ (قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی) استفاده کرده است؛ ولی این قضیه خودش با کمک مجموع زاویه‌های مثلث (180°) ثابت می‌شود. پس دلیل او دوری است.

اصلاح: از C خطی موازی AB رسم می‌کنیم و نقطه‌ای مانند E روی آن، هم‌طرف A می‌گیریم. آنگاه $\hat{ACE} = \hat{A}$ (متبادل داخلی؛ $CE \parallel AB$ و مورب AC) و $\hat{ECD} = \hat{B}$ (متناظر؛ $CE \parallel AB$ و مورب BD). پس $\hat{C}_2 = \hat{ACE} + \hat{ECD} = \hat{A} + \hat{B}$. چون $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$ (زاویه‌ی نیم‌صفحه)، داریم $\hat{C}_1 + \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$.

ایراد راه‌حل هدی: راه‌حل هدی درست است ولی ناقص نوشته شده: نگفته که خطی که از A رسم می‌کند موازی BC است و دلیل تساوی‌ها («زاویه‌های متبادل داخلی بین دو خط موازی برابرند») را ننوشته است. بدون موازی بودن، $\hat{A}_2 = \hat{B}$ و $\hat{A}_3 = \hat{C}$ درست نیستند.

اصلاح: از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم. چون این خط با BC موازی است و AB مورب است، $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (متبادل داخلی). به همین ترتیب با مورب AC، $\hat{A}_3 = \hat{C}$. سه زاویه‌ی $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_2$ و $\hat{A}_3$ کنار هم روی خط راست‌اند، پس $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$ و $\hat{B} + \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$.

پاسخ: راه‌حل هادی دوری است (قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی از همین حکم نتیجه می‌شود)؛ راه‌حل هدی بدون

ذکر موازی بودن خط و دلیل‌ها ناقص است. اصلاح‌ها بالا

تمرین ۳

صفحه ۴۳

۳۷

۳. در پنج‌ضلعی منتظم ABCDE،

الف) زاویه‌ی بین دو قطر AD و BE چند درجه است؟

ب) زاویه بین دو قطر AC و CE در محل تقاطع آنها، چند درجه است؟

زاویه داخلی پنج ضلعی منتظم: مجموع زاویه‌ها $540^\circ = (5-2) \times 180^\circ$ و هر زاویه $108^\circ = 540^\circ \div 5$ است.

الف) مثلث ABE: $AB = AE$ و $\hat{A} = 108^\circ$ ، پس $\hat{ABE} = \hat{AEB} = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$. مثلث EAD: $EA = ED$ و $\hat{E} = 108^\circ$ ، پس $\hat{EAD} = \hat{EDA} = 36^\circ$. AD و BE در نقطه‌ی P متقاطع‌اند. در مثلث APE: $\hat{PAE} = 36^\circ$ و $\hat{PEA} = 36^\circ$ ، پس $\hat{APÊ} = 180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ$. زاویه‌ی بین دو قطر، $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ (زاویه‌ی مجاورش) است.

ب) مثلث BCA: $BA = BC$ و $\hat{B} = 108^\circ$ ، پس $\hat{BCA} = 36^\circ$. مثلث CDE: $DC = DE$ و $\hat{D} = 108^\circ$ ، پس $\hat{DCE} = 36^\circ$. زاویه‌ی $\hat{ACE} = \hat{C} - \hat{BCA} - \hat{DCE} = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ$.

پاسخ: الف) 72° ب) 36° (زاویه‌ی ACE در رأس مشترک C)

تمرین ۴

صفحه ۴۳

۳۸

۴. مثلث ABC و نقاط D و E چه خاصیتی داشته باشند، اگر D و E به ترتیب روی BC و AD باشند، آنگاه با رسم پاره‌خط‌های AD و CE، زاویه‌های با اندازه‌های متفاوت کمترین تعداد ممکن باشد؟ (پنج نقطه‌ی A، B، C، D و E را متمایز در نظر بگیرید.)

مثلث ABC را متساوی‌الساقین با $B = 36^\circ$ و $A = C = 72^\circ$ می‌گیریم. D را روی BC چنان می‌گیریم که $\hat{BAD} = 36^\circ$ و E محل برخورد AD با نیم‌ساز زاویه‌ی C (یعنی $\hat{ACE} = 36^\circ$) است. زاویه‌های شکل فقط سه اندازه‌ی 36° ، 72° و 108° هستند (مثلاً $\hat{ADC} = 72^\circ$ ، $\hat{CED} = 72^\circ$ ، $\hat{AEC} = 108^\circ$). در جست‌وجوی عددی، کمتر از سه اندازه‌ی متفاوت پیدا نشد.

پاسخ: کمترین تعداد ممکن ۳ است.

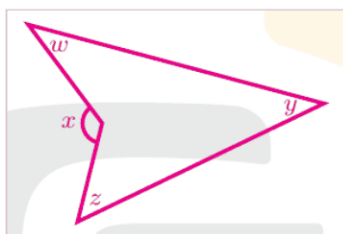
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

تمرین ۵

صفحه ۴۳

۳۹

۵. در شکل زیر ثابت کنید $x = y + z + w$.



رأس‌ها را چنین بنامیم: T (رأس بالای چپ با زاویه ی w)، Y (رأس راست با زاویه ی y)، Z (رأس پایین با زاویه ی z) و M رأس فرورفته که زاویه ی $x = \hat{TMZ}$ ، زاویه ی بیرونی در آن است. نقطه ی M درون مثلث TYZ قرار دارد.

پاره خط YM را از M به بیرون (روی پاره خط TZ، تا نقطه ی N) امتداد می‌دهیم. چون N در امتداد YM است، $\hat{TMN}$ زاویه ی خارجی مثلث TMY در رأس M است:

$$\hat{TMN} = \hat{MTY} + \hat{MYT} = w + \hat{MYT}$$

(زاویه ی خارجی مثلث = مجموع دو زاویه ی داخلی غیرمجاور).

به همین ترتیب $\hat{NMZ}$ زاویه ی خارجی مثلث ZMY است: $\hat{NMZ} = \hat{MZY} + \hat{MYZ} = z + \hat{MYZ}$.

پس $x = \hat{TMN} + \hat{NMZ} = w + z + (\hat{MYT} + \hat{MYZ})$ چون M درون زاویه ی $\hat{TYZ}$ است، $\hat{MYT} + \hat{MYZ} = \hat{TYZ} = y$. بنابراین $x = w + y + z$.

نتیجه: $x = y + z + w$

تمرین ۶

صفحه ۴۳

۴۰

۶. در چهارضلعی ABCD اندازه زاویه C بیشتر از 180° درجه است. اگر دو مثلث ABC و BCD هم‌نهشت باشند، آنگاه درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $\hat{BAC} = \hat{CBD}$ (ب) $\hat{ABC} = \hat{BCD}$ (ج) $AB = BC$ (د) $AB = CD$

چون زاویه ی C از 180° بیشتر است، C درون مثلث ABD قرار می‌گیرد و A و D در دو طرف BC اند. تنها تناظر ممکن بین دو مثلث هم‌نهشت $A \leftrightarrow D$ ، $B \leftrightarrow B$ و $C \leftrightarrow C$ است؛ پس $AB = DB$ ، $AC = DC$ و $\angle ACB = \angle DCB$.

○ (الف) $\angle BAC = \angle BDC$ است، نه الزاماً $\angle CBD$ ؛ در حالت کلی درست نیست.

○ (ب) $\angle ACB = \angle BCD$ ؛ درست است.

○ (ج) $AB = BC$ ؛ در حالت کلی درست نیست (مثلاً $AB = 2.5$ و $BC = 1$).

○ (د) $AB = CD$ ؛ در حالت کلی درست نیست ($CD = AC$ و نه AB).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷. یک چندضلعی محدب، حداکثر و حداقل چند زاویه داخلی حاده (تند) دارد؟

حداکثر: مجموع زاویه‌های خارجی هر چندضلعی محدب 360° است. به ازای هر زاویه داخلی حاده، زاویه‌ی خارجی (مکمل آن) بزرگ‌تر از 90° است. اگر ۴ زاویه‌ی حاده داشتیم، مجموع زاویه‌های خارجی بیشتر از $4 \times 90^\circ = 360^\circ$ می‌شد که ممکن نیست. پس حداکثر ۳ زاویه‌ی حاده.

این مقدار ۳ شدنی است: مثلث حاده‌الزاویه (۳ زاویه‌ی حاده) و چهارضلعی $(2, 0), (0, -1), (0, 0), (0, 3)$ که ۳ زاویه‌ی حاده و یک زاویه‌ی منفرجه دارد.

حداقل: ۰؛ مثلاً مستطیل (همه‌ی زاویه‌ها 90°) یا هر چندضلعی منتظم با بیش از ۳ ضلع. (برای مثلث، حداقل ۲ زاویه‌ی حاده وجود دارد؛ ولی برای چندضلعی‌های محدب به‌طور کلی حداقل ۰ است.)

پاسخ: حداکثر ۳ و حداقل ۰

۸. در چهارضلعی محدب ABCD، امتداد ضلع‌های AD و BC یکدیگر را در نقطه‌ی E، و امتداد ضلع‌های AB و CD یکدیگر را در نقطه‌ی F قطع می‌کنند.

(الف) ثابت کنید اگر $\hat{E} = \hat{F}$ ، آنگاه ABCD دو زاویه‌ی روبه‌روی برابر دارد.

(ب) اگر $\hat{E} = \hat{F} = 20^\circ$ ، آنگاه تفاضل زاویه‌های روبه‌روی ABCD چقدر است؟

(ج) اگر $\hat{E} \neq \hat{F}$ ، آیا می‌توان تفاضل زاویه‌های روبه‌روی ABCD را یافت؟

شکل را چنین در نظر می‌گیریم: E روی امتداد AD (آن سوی D) و امتداد BC (آن سوی C) و F روی امتداد AB (آن سوی B) و امتداد DC (آن سوی C) است؛ پس C به E و F نزدیک است. (با تغییر نام رأس‌ها هر حالت دیگر به این حالت برمی‌گردد.)

در مثلث ABE داریم $\hat{A} + \hat{B} + \hat{E} = 180^\circ$ (۱) و در مثلث ADF داریم $\hat{A} + \hat{D} + \hat{F} = 180^\circ$ (۲). همچنین مجموع زاویه‌های چهارضلعی $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ (۳).

(الف) از (۱) و (۲): $\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{F}$ و $\hat{D} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{E}$. اگر $\hat{E} = \hat{F}$ آنگاه $\hat{B} = \hat{D}$ ؛ پس ABCD دو زاویه‌ی روبه‌روی B و D برابر دارد.

(ب) از الف) و از (۳): $\hat{B} = \hat{D} = 40^\circ + \hat{A} - 2(160^\circ - \hat{A}) = 40^\circ - \hat{A} - 320^\circ + 2\hat{A} = \hat{A} - 280^\circ$. چون $\hat{C} = 360^\circ - \hat{A} - \hat{B} - \hat{D}$ ، پس $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A}$. یعنی تفاضل زاویه‌های روبه‌روی A و C برابر 40° و تفاضل B و D صفر است.

(ج) بله. در حالت کلی: $\hat{B} - \hat{D} = \hat{F} - \hat{E}$ و $\hat{C} - \hat{A} = \hat{E} + \hat{F} - \hat{A} - \hat{B} - \hat{D} = \hat{C} - 360^\circ$ ؛ پس $\hat{B} - \hat{D} = \hat{F} - \hat{E}$ و $\hat{C} - \hat{A} = \hat{E} + \hat{F} - \hat{A} - \hat{B} - \hat{D}$. یعنی تفاضل زاویه‌های روبه‌رو را می‌توان برحسب $\hat{E}$ و $\hat{F}$ به‌دست آورد.

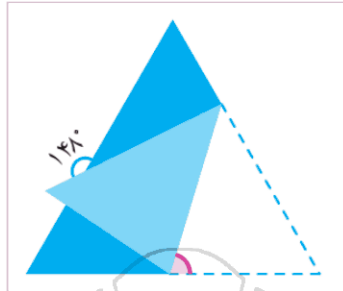
پاسخ: الف) $\hat{B} = \hat{D}$ ب) $\hat{C} - \hat{A} = 40^\circ$ و ج) $\hat{B} - \hat{D} = 0^\circ$ و $\hat{C} - \hat{A} = \hat{E} + \hat{F}$ و $\hat{B} - \hat{D} = \hat{F} - \hat{E}$

تمرین ۹

صفحه ۴۴

۴۳

۹. یک مثلث متساوی الاضلاع مانند شکل زیر تا شده است. اندازه زاویه‌ی صورتی چند درجه است؟



مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر بگیرید که رأس C آن روی خط تا PQ (روی BC و Q روی AC) به C' برده شده است. زاویه‌ی صورتی $\theta = \angle PQC$ است. نقطه‌ی X جایی است که QC' ضلع AB را قطع می‌کند و زاویه‌ی 148° در شکل، زاویه‌ی $\angle AXC'$ است.

۱. در مثلث CPQ: $\hat{C} = 60^\circ$ ، پس $\theta = 120^\circ - 60^\circ - \theta = 120^\circ - \theta$. $\angle PQC = 180^\circ - 60^\circ - \theta = 120^\circ - \theta$.
 ۲. تا زدن زاویه‌ها را حفظ می‌کند: $\theta = 120^\circ - \theta$. پس $\angle PQC' = \angle PQC = 120^\circ - \theta$. $\angle CQC' = 2(120^\circ - \theta) = 240^\circ - 2\theta$.
 ۳. Q روی ضلع AC است؛ پس زاویه‌های $\angle AQC'$ و $\angle CQC'$ روی خط راست AC مکمل‌اند (X روی QC' است): $\angle AQC' = 180^\circ - (240^\circ - 2\theta) = 2\theta - 60^\circ$.
 ۴. زاویه‌ی $\angle AXC'$ مکمل $\angle AQC' = 148^\circ$ است: $\angle AXC' = 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ$.
 ۵. در مثلث AQX: $\hat{A} = 60^\circ$ ، پس $\angle AQC' = 180^\circ - 60^\circ - 32^\circ = 88^\circ$.
 ۶. $\theta = 74^\circ \Rightarrow 2\theta = 148^\circ \Rightarrow 2\theta - 60^\circ = 88^\circ$.
- (بررسی: با $\theta = 74^\circ$ ساخت دقیق شکل و اندازه‌گیری، زاویه‌ی $\angle AXC'$ برابر 148° می‌شود.)

پاسخ: 74°

تمرین ۱۰

صفحه ۴۴

۴۴

۱۰. در شکل‌های زیر، مجموع زاویه‌های رنگ شده را به دست آورید.



هر شکل یک خط شکسته‌ی بسته با خودبرخورد است. با جمع زاویه‌های داخلی مثلث‌هایی که از برخورد ضلع‌ها پدید می‌آیند (یا با فرمول $180^\circ \times (n - 2)$ برای شکل n رأسی که ضلع‌ها k دور می‌چرخند)، جمع زاویه‌های رنگ‌شده به دست می‌آید.

○ شکل سمت راست (ستاره‌ی پنج‌پر): 180°

○ شکل وسط (ستاره‌ی هفت‌پر): 180°

○ شکل سمت چپ (شش رأسی): 360°

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

تمرین ۱۱

صفحه ۴۴

۴۵

۱۱. درون مربعی ۵۷ نقطه وجود دارد. می‌خواهیم این مربع را با کاشی‌های مثلثی‌شکل بپوشانیم به طوری که سه شرط زیر برقرار باشند:

● حتماً و فقط این ۵۷ نقطه و چهار رأس مربع، رئوس کاشی‌های مثلثی باشند.

● کاشی‌ها روی هم قرار نگیرند.

● کاشی‌ها تمام مربع را بپوشانند.

برای این کار به چند کاشی مثلثی نیاز داریم؟

فرض می‌کنیم کاشی‌ها در رأس‌ها به هم می‌رسند (هیچ نقطه‌ای وسط ضلع کاشی دیگر نیفتد)؛ یعنی هر نقطه، رأس همه‌ی کاشی‌هایی است که از آن می‌گذرند. T را تعداد مثلث‌ها بگیریم.

۱. مجموع زاویه‌های همه‌ی مثلث‌ها $T \times 180^\circ$ است.
 ۲. هر یک از ۵۷ نقطه‌ی درونی، رأس چند مثلث است و زاویه‌های مثلث‌ها دور آن نقطه یک دور کامل 360° را پر می‌کنند؛ سهم آنها $57 \times 360^\circ$ است.
 ۳. چهار رأس مربع هم هر کدام 90° از زاویه‌های مثلث‌ها را دارند؛ سهم آنها $4 \times 90^\circ = 360^\circ$ است.
 ۴. پس $T \times 180^\circ = 57 \times 360^\circ + 360^\circ = 58 \times 360^\circ$ و $T = 58 \times 2 = 116$.
- (بررسی رایانه‌ای: مثلث‌بندی دلونه‌ی مربع با ۵۷ نقطه‌ی تصادفی درون آن همیشه ۱۱۶ مثلث می‌دهد.)

پاسخ: ۱۱۶ کاشی مثلثی (در حالتی که کاشی‌ها رأس‌به‌رأس به هم می‌رسند)

تمرین ۱۲

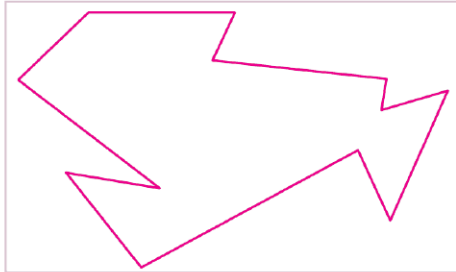
صفحه ۴۴

۴۶

۱۲. می‌خواهیم چندضلعی صفحه‌ی بعد را مثلث‌بندی کنیم، یعنی طوری چندضلعی را با تعدادی مثلث (نه لزوماً هم‌نهشت) بپوشانیم که هر سه شرط زیر برقرار باشد:

● ضلع هر مثلث، ضلع یا قطر چندضلعی باشد.

- هیچ دو مثلثی روی هم قرار نگیرند و هیچ مثلثی از چندضلعی خارج نشود.
 - تمام چندضلعی با مثلث‌ها پوشانده شود.
- الف) حداقل سه مثلث بندی متفاوت برای چندضلعی بالا بیابید.
ب) مجموع زاویه‌های داخلی شکل بالا چند درجه است؟



الف) رأس‌های شکل (ضلع دوازده تایی) را از گوشه‌ی بالا-چپ و ساعتگرد با ۱ تا ۱۲ شماره‌گذاری کنید. هر مثلث بندی ۹ قطر دارد:

- اول: ۱-۳، ۳-۵، ۵-۷، ۷-۸، ۸-۹، ۹-۱۱، ۱۱-۱، ۱-۱۱، ۱۱-۳، ۳-۵، ۵-۱۱
- دوم: ۱-۳، ۳-۵، ۵-۷، ۷-۸، ۸-۹، ۹-۱۱، ۱۱-۳، ۱۲-۳، ۱۲-۱۱، ۱۱-۵، ۵-۱۱، ۱۱-۵
- سوم: ۱-۳، ۳-۵، ۵-۷، ۷-۸، ۸-۱۱، ۱۱-۵، ۹-۱۱، ۱۱-۳، ۱۱-۱، ۱۱-۵، ۵-۱۱

ب) شکل ۱۲ ضلع دارد، پس مجموع زاویه‌های داخلی $180^\circ \times (12-2) = 1800^\circ$ است (۱۰ مثلث).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

تمرین ۱۳

صفحه ۴۵

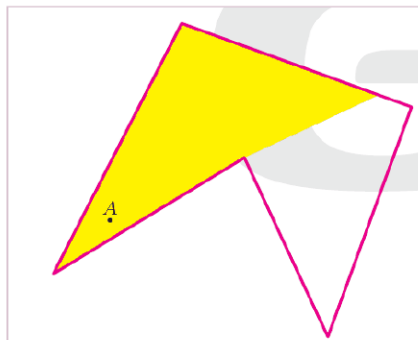
۴۷

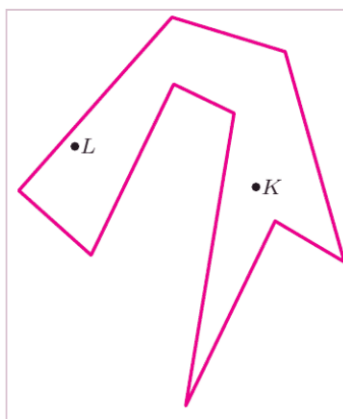
۱۳. در شکل زیر، فرض کنید نقطه A یک لامپ است. این لامپ ناحیه‌ای از چندضلعی را روشن (زرد رنگ) کرده است.

الف) در شکل روبه‌رو، لامپ‌های L و K چه ناحیه‌ای از چندضلعی را روشن می‌کنند؟ آن ناحیه‌ها را با رنگ زرد مشخص کنید.

ب) لامپ‌های شکل روبه‌رو را طوری جابه‌جا کنید که تمام چندضلعی روشن شود.

ج) آیا می‌توان فقط با یک لامپ، این چندضلعی را روشن کرد؟





الف) هر لامپ فقط نقاطی را روشن می‌کند که پاره خط واصل آنها به لامپ کاملاً داخل چندضلعی باشد. لامپ L در بال چپ است و بال چپ و بخشی از بازوی میانی (تا امتداد ضلع‌های رأس‌های مقعر) را روشن می‌کند؛ لامپ K در بازوی میانی است و قسمت بازو و ناحیه‌ی بالای آن را تا امتداد ضلع‌های مجاور می‌بیند، ولی نوک پایین و گوشه‌ی چپ دیده نمی‌شوند.

ب) لامپ L را نزدیک گوشه‌ی چپ (در بال چپ) و لامپ K را بالای بازوی میانی، نزدیک رأس مقعر (۲۳۲،۱۰۴) بگذارید؛ آن‌گاه دو ناحیه‌ی روشن کل چندضلعی را می‌پوشانند.

ج) خیر. از هر نقطه‌ی داخل شکل، همه‌ی رأس‌ها دیده نمی‌شوند: نقطه‌ای که گوشه‌ی چپ را ببیند، نوک پایینی را نمی‌بیند (بررسی رایانه‌ای: ناحیه‌ی مشترک دید همه‌ی ضلع‌ها تهی است). پس دست‌کم دو لامپ لازم است.

پاسخ: ج) خیر، دو لامپ لازم است

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران تونش

تمرین ۱۴

صفحه ۴۶

۴۸

۱۴. شکل‌های زیر، نقشه‌های ساختمانی سه موزه هستند. می‌خواهیم در این موزه‌ها دوربین‌های مداربسته کار بگذاریم. اگر هر دوربین قابلیت دید ۳۶۰ درجه داشته باشد، با حداقل چند دوربین می‌توان تمام نقاط هر یک از موزه‌ها را پایید؟



هر دوربین نقاطی را می‌بیند که پاره خط واصل آنها داخل موزه بماند؛ پس هر «گوشه‌ی فرورفته‌ی» دور از دید (مثلاً نوک یک فرورفتگی یا قلاب) دوربین جداگانه می‌خواهد.

- **موزه‌ی اول (Z شکل):** دو دوربین (یکی در بازوی بالاچپ و یکی در بازوی راست)؛ یک دوربین نمی‌تواند هم قلاب بالاچپ و هم نوک پایین‌راست را ببیند.
- **موزه‌ی دوم (بادبزی):** هفت قلاب در انتهای هفت راهرو باریک وجود دارد که هیچ دوربینی دو تا از آنها را همزمان نمی‌بیند؛ پس هفت دوربین.
- **موزه‌ی سوم:** سه دوربین (یکی برای بخش چپ، یکی برای فرورفتگی پایین و یکی برای بخش راست).

پاسخ: ۲، ۷ و ۳ دوربین

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

پروژه ۱۵

صفحه ۴۶

۴۹

۱۵. پروژه. می‌خواهیم درباره‌ی n -ضلعی‌های مقعر بیشتر بدانیم. برای مثال، می‌توانیم بپرسیم:

● **مجموع زاویه‌های داخلی یک n -ضلعی مقعر چقدر است؟**

● **یک n -ضلعی مقعر حداکثر چند زاویه بیش از 180° درجه دارد؟**

الف) آیا می‌توانید به این پرسش‌ها پاسخ دهید؟

ب) آیا می‌توانید پرسش‌های دیگری مطرح کنید؟

الف) مجموع زاویه‌های داخلی: هر n -ضلعی (حتی مقعر) را می‌توان با قطرهایی که درون آن قرار می‌گیرند به $n-2$ مثلث تقسیم کرد (برای هر چندضلعی با بیش از ۳ ضلع، قطری درونی وجود دارد؛ آن را رسم می‌کنیم و کار را روی دو چندضلعی کوچک‌تر ادامه می‌دهیم). زاویه‌های داخلی چندضلعی، دقیقاً زاویه‌های این مثلث‌ها را پر می‌کنند؛ پس مجموع $180^\circ \times (n-2)$ است، مانند حالت محدب.

حداکثر تعداد زاویه‌های بیش از 180° : اگر r زاویه بیش از 180° داشته باشیم، این زاویه‌ها مجموعاً بیشتر از $180^\circ \times r$ می‌شوند و $n-r$ زاویه‌ی دیگر مثبت‌اند؛ پس $180^\circ \times r < (n-2) \times 180^\circ$ و $r < n-2$ ، یعنی $r \leq n-3$.

این مقدار شدنی هم هست: مثلثی بگیرد و یکی از ضلع‌هایش را با یک خط شکسته‌ی رو به درون (روی یک کمان داخل مثلث) با $n-3$ رأس درونی جایگزین کنید؛ همه‌ی این $n-3$ رأس زاویه‌ی بیش از 180° دارند (برای $n=4$ تا ۴۰ با رایانه بررسی شد). پس حداکثر برابر $n-3$ است (برای $n \geq 4$).

ب) پرسش‌های دیگر (نمونه): یک n -ضلعی محدب حداکثر چند زاویه‌ی حاده دارد؟ (پاسخ: ۳؛ زاویه‌های خارجی حاده‌ها بزرگ‌تر از 90° و مجموع زاویه‌های خارجی 360° است). یا: «مجموع زاویه‌های خارجی یک n -ضلعی محدب چقدر است؟» (پاسخ: 360°).

۱۶. پروژه. اگر یک موزه n -ضلعی داشته باشیم، برای پاییدن آن حداقل به چند دوربین نیازمندیم؟ به عبارت دیگر برای پاییدن هر موزه با n دیوار چند دوربین کافی است؟

پاسخ: همیشه $[n \div 3]$ دوربین کافی است (بزرگ‌ترین عدد صحیح که از $n \div 3$ بیشتر نباشد)؛ مثلاً برای ۶ دیوار، ۲ دوربین و برای ۱۲ دیوار، ۴ دوربین.

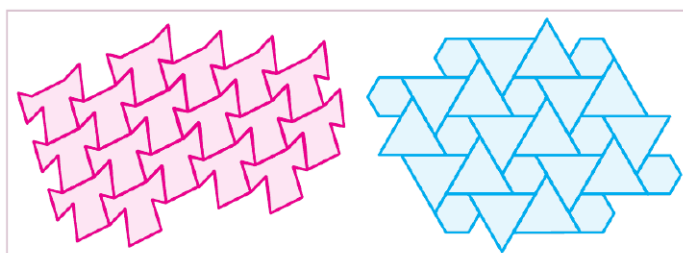
دلیل (با کمک مثلث‌بندی):

۱. موزه را مثلث‌بندی می‌کنیم (قطرهای درونی؛ $n-2$ مثلث).
 ۲. رأس‌ها را با سه رنگ طوری رنگ می‌کنیم که سه رأس هر مثلث سه رنگ متفاوت داشته باشند. (این کار شدنی است: مثلث اول را رنگ می‌کنیم و هر بار مثلثی را که دو رأس رنگ‌شده دارد با رنگ سوم کامل می‌کنیم).
 ۳. n رأس بین سه رنگ پخش شده است؛ رنگی که کمترین رأس را دارد حداکثر $[n \div 3]$ رأس دارد. در همه‌ی آن رأس‌ها دوربین می‌گذاریم.
 ۴. هر مثلث، یک رأس با آن رنگ دارد؛ پس دوربینی در یکی از رأس‌های هر مثلث است. مثلث محدب است و دوربین سه‌جانبه‌ی رأس، تمام آن را می‌بیند. بنابراین تمام موزه دیده می‌شود.
- (کارایی روش بر چندضلعی‌های تصادفی از ۵ تا ۳۰ ضلع با رایانه بررسی شد. این نتیجه به «قضیه‌ی گالری هنری» معروف است و کاهش آن در حالت کلی ممکن نیست؛ نمونه‌ی «شانه» با $n=3k$ ضلع به k دوربین نیاز دارد.)

پاسخ: $[n \div 3]$ دوربین کافی است

ایران توئینش
توشه‌ای برای موفقیت

۱. الف) چرا هیچ‌کدام از کاشی‌کاری‌های زیر کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع نیستند؟
ب) کدام یک از کاشی‌کاری‌های بالا تک‌وجهی است؟



الف) در هر دو کاشی‌کاری، رأس یک کاشی وسط ضلع کاشی دیگر قرار گرفته است؛ یعنی دو کاشی مجاور نه یک رأس مشترک دارند و نه یک ضلع کامل مشترک، بلکه بخشی از ضلع یکی با ضلع دیگری مشترک است. این شرط «ضلع به ضلع» را نقض می‌کند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ب) کاشی‌کاری تک‌وجهی یعنی همه‌ی کاشی‌ها هم‌نهشت باشند. در کاشی‌کاری صورتی همه‌ی کاشی‌ها نسخه‌های یک شکل (با همان جهت) هستند، پس **تک‌وجهی** است. در کاشی‌کاری آبی، مثلث‌ها و شکل‌های دیگر (شش ضلعی‌مانند) با هم به کار رفته‌اند و هم‌نهشت نیستند، پس تک‌وجهی نیست.

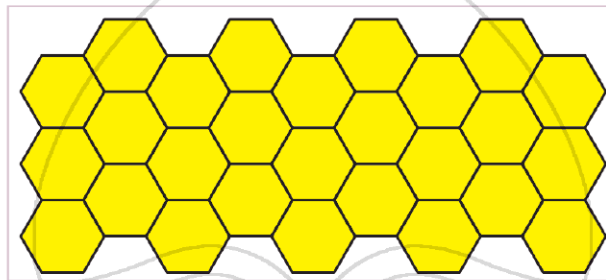
پاسخ (ب): کاشی‌کاری صورتی تک‌وجهی است؛ کاشی‌کاری آبی نه

تمرین ۱ (ج)

صفحه ۴۸

۵۲

ج) کاشی‌کاری زیر یک کاشی‌کاری ضلع به ضلع است. چرا؟



کاشی‌کاری زنبوری از شش ضلعی‌های منتظم هم‌اندازه ساخته شده است. هر دو شش ضلعی مجاور یکدیگر یا دقیقاً یک ضلع کامل مشترک دارند (ضلع‌ها کاملاً بر هم منطبق‌اند) یا فقط یک رأس مشترک دارند، و هیچ رأسی وسط ضلع شش ضلعی دیگر نیفتاده است. چون هر دو کاشی «یا هیچ نقطه مشترکی ندارند، یا فقط در یک رأس مشترک‌اند، یا فقط در یک ضلع کامل مشترک‌اند»، کاشی‌کاری ضلع به ضلع است.

پاسخ: هر دو کاشی یا ضلع کامل مشترک دارند، یا فقط یک رأس، یا هیچ

۲. اگر به محیط اطراف خود دقت کنید، کاشی‌کاری‌های جالبی می‌بینید. در زیر، کدام تصویرها قسمتی از یک کاشی‌کاری را نشان می‌دهند؟ ضلع به ضلع و تک‌وجهی بودن هر کاشی‌کاری را بررسی کنید.



- **بالاچپ (شش ضلعی‌های کوچک):** کاشی‌کاری است؛ ضلع به ضلع و تک‌وجهی (شش ضلعی‌های هم‌نهشت).
- **بالاراست (لوزی‌های سیاه و سفید):** کاشی‌کاری است و ضلع به ضلع؛ چون شکل‌های سیاه و سفید هم‌نهشت نیستند، تک‌وجهی نیست.
- **پایین‌چپ (طرح پیکانی رنگی):** کاشی‌کاری است و کاشی‌ها هم‌نهشت‌اند، پس تک‌وجهی؛ ولی رأس کاشی‌ها وسط ضلع کاشی‌های دیگر می‌افتد، پس ضلع به ضلع نیست.
- **پایین‌راست (سنگ‌های نامنظم):** سنگ‌ها هم‌نهشت نیستند و بین آنها درز و شکاف است؛ کاشی‌کاری (به معنای ریاضی) نیست.

پوشه‌ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳. طرح روی جلد کتاب ریاضی تکمیلی هشتم یک نوع کاشی‌کاری است. ضلع به ضلع و تک‌وجهی بودن این کاشی‌کاری را بررسی کنید.

طبق متن صفحه ۵۱، کاشی‌کاری جلد کتاب نمونه‌ای از کاشی‌کاری‌های تک‌وجهی با پنج ضلعی‌های محدب است؛ پس همه‌ی کاشی‌ها پنج ضلعی‌های هم‌نهشت‌اند و **تک‌وجهی** است. در این کاشی‌کاری‌ها معمولاً رأس یک پنج‌ضلعی وسط ضلع پنج‌ضلعی دیگر قرار می‌گیرد، پس **ضلع به ضلع نیست**.

۵۵

صفحه ۴۹

تمرین ۴

۴. در هر قسمت کاشی کاری خواسته شده را در محیط اطراف خود (سرویس های بهداشتی، حمام، آشپزخانه، حیاط، راهروهای ساختمان، نمای ساختمان، مدرسه، پیاده‌رو، استخر، مسجد، زیارتگاه و ...) بیابید و آن را در دفترتان رسم کنید. سپس پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.
- الف) یک کاشی کاری که ضلع به ضلع باشد ولی تک‌وجهی نباشد.
- ب) یک کاشی کاری که هم ضلع به ضلع باشد و هم تک‌وجهی.
- ج) یک کاشی کاری که تک‌وجهی باشد ولی ضلع به ضلع نباشد.
- د) یک کاشی کاری که نه تک‌وجهی باشد و نه ضلع به ضلع.

(نمونه‌ی پاسخ؛ مثال‌ها در محیط‌های مختلف متفاوت است.)

- الف) کف‌پوشی از هشت ضلعی‌های منتظم و مربع‌های کوچک بین آنها: ضلع به ضلع است (هر ضلع کاملاً به یک ضلع دیگر چسبیده) ولی دو نوع کاشی دارد.
- ب) کاشی‌های مربع‌شکل که ردیف‌ها دقیقاً زیر هم قرار گرفته‌اند (دیوار حمام)، یا کاشی‌های شش ضلعی منتظم زنبوری.
- ج) آجرچینی دیوار یا آجر فرش حیاط با «بند نیم‌آجر»: همه‌ی آجرها هم‌زهشت‌اند، ولی ضلع بلند هر آجر با دو آجر زیرین یا بالایی فقط قسمتی از ضلع را مشترک دارد.
- د) کف‌پوشی از مربع‌های بزرگ و کوچک در کنار هم که ضلع بزرگ با چند مربع کوچک مشترک است؛ یا سنگ‌فرش از سنگ‌های نامنظم با اندازه‌های مختلف.

پاسخ: نمونه‌ها در بالا

۵۶

صفحه ۴۹

تمرین ۵

۵. الف) نشان دهید که مجموع زاویه‌های داخلی یک n -ضلعی محدب مساوی با $2n - 2$ برابر مجموع زاویه‌های یک مثلث است.
- ب) چرا با افزایش تعداد اضلاع چندضلعی منتظم، اندازه‌ی زاویه‌های داخلی آن بیشتر می‌شود؟
- ج) چرا اگر n عددی بزرگ‌تر از شش باشد، با n -ضلعی منتظم نمی‌توان کاشی کاری ضلع به ضلع تک‌وجهی کرد؟
- د) چرا با پنج ضلعی منتظم نمی‌توان کاشی کاری ضلع به ضلع تک‌وجهی کرد؟

ه) ثابت کنید فقط سه نوع چندضلعی منتظم هستند که با آنها می‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع تک‌وجهی کرد.

الف) از یک رأس A به همه‌ی رأس‌های غیرمجاور آن قطر می‌کشیم. چندضلعی محدب به $n-2$ مثلث تقسیم می‌شود (دو رأس مجاور A و خود A جز مثلث‌ها محسوب می‌شوند؛ تعداد مثلث‌ها = تعداد ضلع‌های غیرمجاور $(n-2 = A)$). زاویه‌های داخلی چندضلعی دقیقاً از کنار هم گذاشتن زاویه‌های این مثلث‌ها به دست می‌آید؛ پس مجموع آنها $180^\circ \times (n-2)$ است.

ب) هر زاویه‌ی داخلی چندضلعی منتظم برابر $180^\circ - 360^\circ \div n = 180^\circ \div (n-2)$ است. وقتی n زیاد می‌شود، $360^\circ \div n$ کم می‌شود و در نتیجه $180^\circ - 360^\circ \div n$ بیشتر می‌شود. (مثلاً $n=3, 4, 5, 6$: $120^\circ, 108^\circ, 90^\circ, 60^\circ$).

ج) در کاشی‌کاری ضلع به ضلع، در هر رأس چند کاشی (دست‌کم ۳ کاشی؛ زیرا هر زاویه‌ی کاشی کمتر از 180° است و دو کاشی نمی‌توانند 360° را پر کنند) کنار هم‌اند و مجموع زاویه‌هایشان 360° است. اگر کاشی‌ها n -ضلعی منتظم هم‌نهشت باشند، k کاشی با زاویه‌ی α داریم $k \times \alpha = 360^\circ$ و $k \geq 3$ پس $\alpha \leq 120^\circ$. ولی برای $n > 6$ ، $120^\circ = 180^\circ - 360^\circ \div n > 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ تناقض است.

د) زاویه‌ی پنج‌ضلعی منتظم 108° است و باید $k \times 108^\circ = 360^\circ$ شود؛ $108 \div 360 = 10 \div 3$ صحیح نیست. پس کنار هم گذاشتن پنج‌ضلعی‌های منتظم در یک رأس بدون فاصله و هم‌پوشانی ممکن نیست.

ه) باید $k \times \alpha = 360^\circ$ با k صحیح و $\alpha = 180^\circ - 360^\circ \div n$ پس $k \times (180^\circ - 360^\circ \div n) = 360^\circ$ و با تقسیم بر 180° : $1 - 2 \div n = 2 \div k$ یعنی $2 \div n = 2 \div k$ و $2 \div n = 1 - 2 \div k$ و $n = 2k \div (k-2) = 2 + 4 \div (k-2)$ برای صحیح بودن n ، $k-2$ باید مقسوم‌علیه ۴ باشد: $k-2 = 1, 2, 4$ یعنی $k = 3, 4, 6$ و $n = 6, 4, 3$ پس فقط مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش‌ضلعی منتظم. هر سه واقعاً کاشی‌کاری ضلع به ضلع تک‌وجهی می‌دهند (۶ مثلث، ۴ مربع یا ۳ شش‌ضلعی دور هر رأس).

پاسخ: فقط مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش‌ضلعی منتظم

ایران‌توشه
کتابخانه‌ای برای موفقیت

۵۷

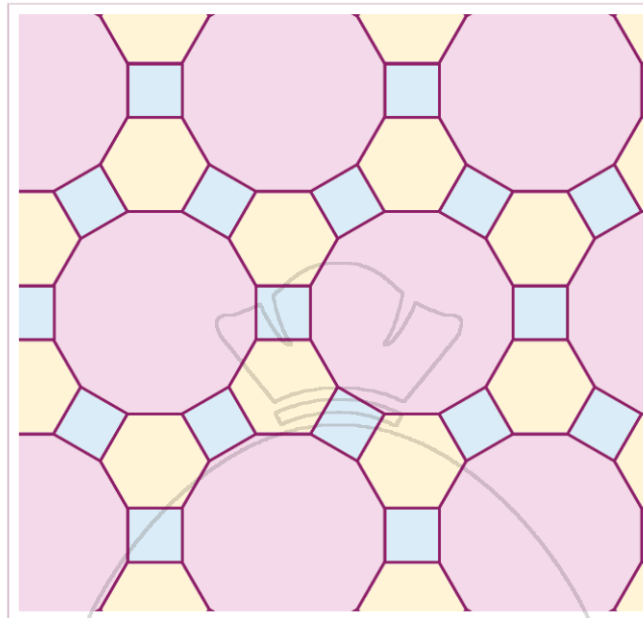
صفحه ۴۹

تمرین ۶

۶. در هر یک از موارد زیر بررسی کنید که آیا با تعدادی چندضلعی منتظم (به طول واحد) می‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع کرد یا خیر. (توجه کنید که در هر مورد باید از هر نوع کاشی، حداقل یک‌بار استفاده شود).
الف) چهارضلعی منتظم، شش‌ضلعی منتظم و ۱۲ ضلعی منتظم
ب) سه‌ضلعی منتظم، هفت‌ضلعی منتظم و ۴۲ ضلعی منتظم

زاویه‌ی داخلی چندضلعی منتظم n ضلعی: $180^\circ - 360^\circ \div n$. زاویه‌ها: مربع 90° ، شش‌ضلعی 120° ، ۱۲ ضلعی 150° ، مثلث 60° ، هفت‌ضلعی $900^\circ \div 7$ ، ۴۲ ضلعی $1200^\circ \div 7$.

الف) بله. در هر رأس یک مربع، یک شش ضلعی و یک ۱۲ ضلعی کنار هم قرار می‌گیرند: $90^\circ + 120^\circ + 150^\circ = 360^\circ$. شکل زیر یک کاشی‌کاری ضلع به ضلع با همین سه نوع کاشی است: مراکز ۱۲ ضلعی‌ها روی شبکه‌ی مثلثی هستند، بین هر دو ۱۲ ضلعی مجاور یک مربع و در مرکز هر سه ۱۲ ضلعی یک شش ضلعی قرار می‌گیرد. (بررسی مساحت: سلول شبکه برابر یک ۱۲ ضلعی + دو شش ضلعی + سه مربع است و مساحت‌ها برابرند: $9 + 6\sqrt{3}$)



ب) خیر. در یک رأس که یک هفت ضلعی در آن است باید a مثلث، b هفت ضلعی و c ۴۲ ضلعی با $a \times 60^\circ + b \times 120^\circ + c \times 140^\circ = 360^\circ$ باشند. با ضرب در 7 : $6a + 12b + 14c = 42$. با $a=b=c=1$ تنها جواب $a=b=c=1$ است ($b=1$: $7a+14c=28$ فقط $a=c=1$; $b \geq 2$ جواب ندارد). یعنی در هر رأس هفت ضلعی، دقیقاً یک مثلث، یک هفت ضلعی و یک ۴۲ ضلعی هستند.

حالا دور هفت ضلعی بگردیم: در هر رأس آن، دو کاشی دیگر یک مثلث و یک ۴۲ ضلعی‌اند. کاشی کنار هر ضلع هفت ضلعی، در دو سر آن ضلع مشترک است؛ پس اگر کنار یک ضلع مثلث باشد، در رأس بعدی دو کاشی یکی مثلث (همان) و دیگری ۴۲ ضلعی است، یعنی ضلع بعدی کنار ۴۲ ضلعی است. بنابراین کاشی‌های کنار ضلع‌های هفت ضلعی یکی در میان «مثلث، ۴۲ ضلعی، مثلث، ...» می‌شوند. ولی هفت ضلعی ۷ ضلع (عدد فرد) دارد و این تناوب هنگام بازگشت به ضلع اول با خودش در تناقض است. پس چنین کاشی‌کاری‌ای وجود ندارد.

پاسخ: الف) بله ب) خیر

تمرین ۷

صفحه ۵۰

۵۸

۷. الف) در شکل روبه‌رو، با تعدادی پنج ضلعی منتظم و دو نوع چهار ضلعی، یک کاشی‌کاری ضلع به ضلع ارائه شده است. چرا این دو نوع چهار ضلعی، لوزی هستند؟

ب) با تعدادی پنج ضلعی منتظم هم نهشت و یک نوع لوزی، یک کاشی کاری ضلع به ضلع بسازید.

الف) چون کاشی کاری ضلع به ضلع است، هر ضلع هر چهار ضلعی، ضلع کامل یکی از پنج ضلعی های منتظم مجاور آن است. همه ی پنج ضلعی های منتظم هم نهشت اند و ضلعشان برابر است؛ پس هر چهار ضلع هر چهار ضلعی با هم برابرند. چهار ضلعی با چهار ضلع برابر، لوزی است.

ب) زاویه ی پنج ضلعی منتظم 108° است. اگر در یک رأس دو پنج ضلعی و یک لوزی باشند، زاویه ی لوزی $36^\circ - 144^\circ = 108^\circ \times 2$ می شود و زاویه ی مجاورش $36^\circ = 144^\circ - 180^\circ$ ؛ سه پنج ضلعی و یک لوزی هم $36^\circ - 324^\circ = 36^\circ$ می دهد. پس لوزی با زاویه های 36° و 144° و ضلعی هم اندازه ی ضلع پنج ضلعی را می گیریم؛ دور هر رأس یا «۳ پنج ضلعی + زاویه ی 36° لوزی» یا «۲ پنج ضلعی + زاویه ی 144° لوزی» قرار می دهیم و کاشی کاری را ردیف به ردیف ادامه می دهیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

پاسخ (الف): چهار ضلع هر چهار ضلعی ضلع های برابر پنج ضلعی های منتظم اند، پس لوزی است

تمرین ۸

صفحه ۵۰

۵۹

۸. نشان دهید با هر مثلث می توان کاشی کاری تک وجهی کرد.

راهنمایی: ابتدا نشان دهید می توان با چسباندن دو مثلث هم نهشت به یکدیگر، یک متوازی الاضلاع ساخت.

سپس نشان دهید با هر متوازی الاضلاع می توان کاشی کاری تک وجهی کرد.

گام اول: مثلث ABC و مثلث هم نهشت دیگری که آن را با دوران 180° حول وسط M ضلع BC به دست می آوریم. B به C و C به B می رود و A به نقطه ی A' می رود. چون M وسط AA' و وسط BC است، قطرهای چهار ضلعی ABA'C یکدیگر را نصف می کنند؛ پس $AB = A'C$ و $AC = A'B$ (ضلع های روبه رو برابرند) و ABA'C متوازی الاضلاع است.

گام دوم: یک متوازی الاضلاع با ضلع های u و v (به صورت بردار) را به اندازه ی u و v و ترکیب آنها جابه جا می کنیم. هر نسخه با نسخه ی کناری اش ضلع کاملاً مشترک دارد (ضلع های روبه رو موازی و برابرند) و در هر رأس چهار زاویه ی $\alpha, \beta, \alpha, \beta$ قرار می گیرند که $\alpha + \beta = 180^\circ$ پس مجموعشان 360° است. بدون فاصله و هم پوشانی، کل صفحه پوشانده می شود.

پس هر مثلث با دو نسخه اش یک متوازی الاضلاع می سازد و متوازی الاضلاع ها صفحه را می پوشانند؛ یعنی کل صفحه با مثلث های هم نهشت پوشانده می شود. ■

تمرین ۹

صفحه ۵۰

۶۰

۹. نشان دهید با هر چهار ضلعی محدب می توان کاشی کاری تک وجهی کرد.

راهنمایی: ابتدا نشان دهید می‌توان با چسباندن دو چهارضلعی محدب هم‌نهشت به یکدیگر، یک چندضلعی ساخت که ضلع‌های آن دوه‌دو باهم موازی و مساوی باشند. سپس نشان دهید با هر چندضلعی که ضلع‌های آن دوه‌دو باهم موازی و مساوی باشند، می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

گام اول: چهارضلعی محدب ABCD را حول وسط M ضلع CD به اندازه 180° می‌چرخانیم. C و D جای هم می‌روند و A, B به A', B' می‌روند. دو چهارضلعی در ضلع CD به هم چسبیده‌اند و روی هم نمی‌افتند. شش‌ضلعی حاصل A B C A' B' D است و با دوران 180° حول M بر خودش منطبق می‌شود؛ پس ضلع‌های روبه‌رو دوه‌دو برابرند و چون تحت نیم‌دور به هم می‌روند، موازی هم هستند: AB با A'B', BC با B'D (که BC را می‌برد به DB') و CA' با DA. (اگر $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$ شود، شکل متوازی‌الاضلاع است.)

گام دوم: شش‌ضلعی H که ضلع‌هایش دوه‌دو موازی و برابرند را در نظر بگیرید: زاویه‌های روبه‌روی آن هم برابرند و اگر آنها را $\alpha, \beta, \gamma, \alpha, \beta, \gamma$ بنامیم، $2(\alpha + \beta + \gamma) = 720^\circ$ یعنی $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$. نسخه‌هایی از H را طوری می‌چینیم که هر ضلع با نسخه‌ی بعدی‌اش که ضلع روبه‌رو را دارد کاملاً بر هم منطبق شود (جابه‌جایی به اندازه‌ی بردار بین دو ضلع روبه‌رو). در هر رأس سه کاشی با زاویه‌های α, β, γ گرد هم می‌آیند و مجموعشان 360° است؛ پس بدون فاصله و هم‌پوشانی، همه‌ی صفحه پوشانده می‌شود. (برای متوازی‌الاضلاع همین استدلال با زاویه‌های $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 360^\circ$ است.) ■

(بررسی رایانه‌ای: برای چهارضلعی‌های محدب تصادفی، نسخه‌های چهارضلعی و قرینه‌ی نیم‌دوری‌اش، با جابه‌جایی‌هایی به اندازه‌ی قطر‌ها، یک پنجره‌ی مربعی را بدون فاصله و هم‌پوشانی می‌پوشانند.)

تمرین ۱۰

صفحه ۵۰

۶۱

۱۰. نشان دهید با هر چهارضلعی مقعر می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

همین روش تمرین ۹ برای چهارضلعی مقعر هم درست است. چهارضلعی ABCD و نسخه‌ی دوران‌یافته‌ی آن حول وسط ضلع AB را به کار می‌بریم. چون مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی (مقعر هم) 360° است، $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ می‌توان چهار نسخه را دور یک نقطه چید که زاویه‌های $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ آنها کنار هم قرار می‌گیرند و 360° را کامل می‌کنند. همه‌ی نسخه‌ها از دوران 180° حول وسط ضلع‌ها به دست می‌آیند و جابه‌جایی‌های حاصل، جابه‌جایی‌هایی به اندازه‌ی قطر‌های AC و BD هستند.

(بررسی رایانه‌ای: برای چهارضلعی‌های مقعر تصادفی، نسخه‌ی اصلی و نسخه‌ی دوران‌یافته با همه‌ی جابه‌جایی‌ها یک پنجره‌ی مربعی را بدون فاصله و هم‌پوشانی می‌پوشانند.)

۱۱. یک پنج ضلعی محدب مثال بزنید که با آن نتوان کاشی کاری تک وجهی کرد.

پنج ضلعی منتظم. فرض کنید با پنج ضلعی‌های منتظم هم‌نهشت کل صفحه کاشی کاری شده باشد (حتی اگر ضلع به ضلع نباشد). یک نقطه که رأس دست‌کم یک کاشی است را در نظر بگیرید. هر کاشی‌ای که از این نقطه می‌گذرد یا این نقطه رأس آن است (زاویه ۱۰۸° را پر می‌کند) یا نقطه روی ضلع آن قرار دارد (زاویه ۱۸۰° را پر می‌کند). اگر k کاشی از نوع اول و m کاشی از نوع دوم باشد، $۱۰۸k + ۱۸۰m = ۳۶۰$ با $k \geq ۱$.

○ $m = ۰$: $۱۰۸k = ۳۶۰$ ، $k = ۱۰ \div ۳$ صحیح نیست.

○ $m = ۱$: $۱۰۸k = ۱۸۰$ ، $k = ۵ \div ۳$ صحیح نیست.

○ $m \geq ۲$: $۱۸۰m \geq ۳۶۰$ و k صفر می‌شود، ولی $k \geq ۱$.

هیچ حالتی ممکن نیست؛ پس با پنج ضلعی منتظم نمی‌توان صفحه را کاشی کاری کرد.

پاسخ: پنج ضلعی منتظم

۱۲. یکی از پنج ضلعی‌های محدبی که می‌توان با آن کاشی کاری تک وجهی کرد، «پنج‌باز» است (شکل زیر). با پنج‌باز کاشی کاری تک وجهی کنید.

پنج‌باز چهار ضلع برابر دارد و زاویه‌هایش در شرط‌هایی مانند $\hat{A} + \hat{C} = ۳۶۰^\circ$ و $\hat{D} + ۲\hat{E} = ۳۶۰^\circ$ صدق می‌کند؛ یعنی دور یک رأس می‌توان دو زاویه‌ی $\hat{A}$ و یک زاویه‌ی $\hat{C}$ (یا یک $\hat{D}$ و دو $\hat{E}$) را کنار هم گذاشت و ۳۶۰° درجه را پر کرد.

روش: پنج ضلعی را با نیم‌دور حول وسط یک ضلع به نسخه‌ی هم‌نهشتش می‌چسبانیم تا یک شش ضلعی یا هشت ضلعی بسازد؛ این کاشی بزرگ‌تر را با انتقال تکرار می‌کنیم و به ترتیب ردیف‌ها را کنار هم می‌گذاریم. در هر رأس، زاویه‌ها همان ترکیب ۳۶۰° درجه می‌شوند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳. شما و ریاضی دانان می دانید که با هر پنج ضلعی محدب نمی توان کاشی کاری تک وجهی کرد. سؤالی که برای ریاضی دانان مطرح است این است که یک پنج ضلعی محدب چه خاصیتی داشته باشد که بتوان با آن کاشی کاری تک وجهی کرد.

تا به امروز ثابت شده است که پنج ضلعی محدب باید در یکی از «پانزده دسته» صفحه‌ی بعد باشد؛ یعنی بین ضلع‌ها یا زاویه‌هایش رابطه‌ای مثل $a = b$, $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ یا $2\hat{A} + \hat{C} = 360^\circ$ برقرار باشد. به طور کلی لازم است در هر رأس زاویه‌های پنج ضلعی‌ها جمعاً 360° شوند و ضلع‌های مشترک هم‌اندازه باشند (مثلاً جمع سه زاویه‌ی مناسب یا ترکیبی از آنها 360° شود).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

الف) پنج ضلعی روی جلد این کتاب در کدام دسته از پانزده دسته داده شده قرار دارد؟
ب) پنج باز در کدام دسته از پانزده دسته داده شده قرار دارد؟

الف) متن بالای جدول می‌گوید پنج ضلعی جلد کتاب در سال ۲۰۱۵ کشف شده است؛ دسته‌ای که برای سال ۲۰۱۵ نشان داده شده، دسته‌ی ۱۵ است.

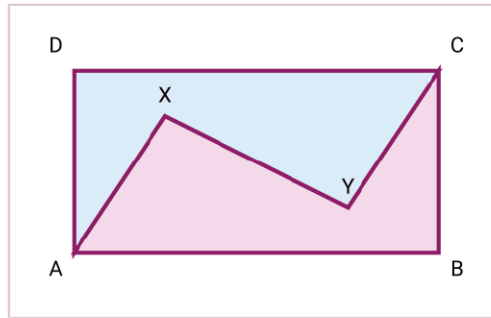
ب) پنج باز چهار ضلع برابر دارد؛ از میان دسته‌ها، دسته‌های ۷، ۸ و ۹ شرط $b = c = d = e$ دارند و پنج باز با شرط $2\hat{A} + \hat{C} = \hat{D} + 2\hat{E} = 360^\circ$ به نظر دسته‌ی ۹ می‌رسد.

پاسخ: الف) دسته‌ی ۱۵ ب) دسته‌ی ۹ (حدسی)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴. یک پنج ضلعی مقعر مثال بزنید که با آن بتوان کاشی کاری تک وجهی کرد.

یک مستطیل ABCD با $A=(0,0)$, $B=(4,0)$, $C=(4,2)$, $D=(0,2)$ بگیرید. دو نقطه‌ی $X=(1,1/5)$ و $Y=(3,0/5)$ که نسبت به مرکز مستطیل $(2,1)$ قرینه‌اند را انتخاب کنید و مستطیل را با خط شکسته‌ی $A \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow C$ به دو قسمت ببرید.



قسمت پایین، پنج ضلعی ABCYX و قسمت بالا، پنج ضلعی CDXY است. نیم دور حول مرکز مستطیل A را به B, C, D و X را به Y می برد؛ پس دو پنج ضلعی هم نهشت اند. زاویه ی ABCYX در رأس Y بیش از 180° (حدود 263°) است؛ پس مقعر است.

مستطیل ها صفحه را می پوشانند (کاشی کاری مربع و مستطیل) و هر مستطیل از دو پنج ضلعی هم نهشت ساخته شده است؛ پس با این پنج ضلعی مقعر می توان صفحه را کاشی کاری تک وجهی کرد.

پاسخ: پنج ضلعی ABCYX با رأس های $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,2)$, $(3,0.5)$, $(1,1.5)$

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



تمرین ۱۵

صفحه ۵۲

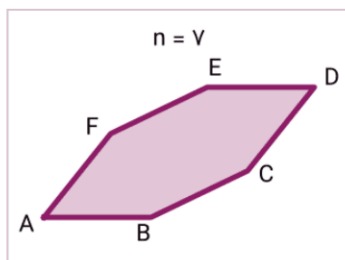
۶۷

۱۵. فرض کنید n عدد طبیعی و بزرگ تر از ۲ باشد. به شش ضلعی متساوی الاضلاعی که دو زاویه ی روبه روی آن با هم برابر باشند و بقیه ی زاویه های آن با هم برابر باشند، «شش طولانی» می گویند. (الف) اگر $n = 7$ ، آنگاه اندازه ی هر یک از زاویه های شش طولانی مربوطه را به دست آورید و این شش ضلعی را رسم کنید.

(ب) چرا با کمک هر یک از انواع شش طولانی می توان با روش زیر کاشی کاری ضلع به ضلع تک وجهی کرد؟
(ج) نشان دهید اگر $n = 7$ ، آنگاه با کمک شش طولانی ساخته شده، می توان به روش زیر کاشی کاری ضلع به ضلع تک وجهی کرد.

(در کتاب: «شش طولانی» شش ضلعی متساوی الاضلاعی است که دو زاویه ی روبه روی آن هر کدام $360^\circ \div n$ و بقیه ی زاویه ها با هم برابرند.)

(الف) دو زاویه ی روبه رو $51 \frac{3}{7}^\circ = 360^\circ \div 7$ (حدود 51.43°) هستند. مجموع زاویه های شش ضلعی $720^\circ = (6-2) \times 180^\circ$ است؛ چهار زاویه ی دیگر که برابرند، هر کدام $154^\circ = 1080^\circ \div 7 = (720^\circ - 2 \times 360^\circ) \div 4$ (حدود 154.29°) هستند.



(برای رسم: ضلع واحد می‌گیریم و پیش از هر رأس به ترتیب با زاویه‌های خارجی $7 \div 1080^\circ - 180^\circ$ ، ... جهت ضلع‌ها را عوض می‌کنیم؛ شکل بالا دقیق است.)

ب) در شش طولانی، دو زاویه‌ی روبه‌رو $s = 360^\circ \div n$ و چهار زاویه‌ی دیگر $t = 180^\circ - 180^\circ \div n$ است و $s + 2t = 360^\circ$. ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند: دو ضلع روبه‌رو را با سه زاویه‌ی بین آنها $(180^\circ - s)$ و $(180^\circ - t)$ می‌شناسیم که جمع آنها $180^\circ = (2t + s) - 540^\circ$ است؛ یعنی جهت دو ضلع روبه‌رو دقیقاً 180° اختلاف دارد و موازی‌اند. چون همه‌ی ضلع‌ها برابرند، ضلع‌های روبه‌رو موازی و برابرند. طبق تمرین ۹، چنین شش‌ضلعی را می‌توان با جابه‌جایی کاشی‌کاری کرد، و هر رأس هم کاشی‌هایی با زاویه‌های s, t, t دارد که $s + 2t = 360^\circ$ می‌شود. پس کاشی‌کاری ضلع به ضلع تک‌وجهی ممکن است.

ج) در شش طولانی با $n=7$ ، دو زاویه‌ی کوچک $360^\circ \div 7$ دارند. هفت نسخه‌ی شش طولانی را طوری دور یک نقطه می‌گذاریم که زاویه‌های کوچک‌شان کنار هم بنشینند؛ $7 \times (360^\circ \div 7) = 360^\circ$ و دور نقطه پر می‌شود (شکل «گل»). هر نسخه با نسخه‌ی کناری ضلع کامل مشترک دارد، چون همه‌ی ضلع‌ها برابرند. به‌علاوه ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند (قسمت ب)، پس گل‌ها را می‌توان با انتقال تکرار کرد و کل صفحه را ضلع به ضلع پوشاند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

پاسخ: الف) $51 \frac{3}{7}^\circ$ (دو زاویه) و $154 \frac{2}{7}^\circ$ (چهار زاویه) ب) شش‌ضلعی با ضلع‌های روبه‌روی موازی و برابر کاشی‌کاری انتقالی می‌دهد

توشه‌ای برای موفقیت

تمرین ۱۶

صفحه ۵۳

۶۸

۱۶. در سال ۱۹۱۸ میلادی، کارل رینهارت ثابت کرد که تنها با سه نوع شش ضلعی محدب می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد. او ضلع‌ها و زاویه‌های یک شش ضلعی محدب را به‌صورت زیر نام‌گذاری کرد و آن سه دسته را چنین معرفی کرد:

● ویژگی‌های دسته اول: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$, $a = d$

● ویژگی‌های دسته دوم: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 360^\circ$, $a = d, c = e$

● ویژگی‌های دسته سوم: $\hat{A} = \hat{C} = \hat{E} = 120^\circ$, $a = b, c = d, e = f$

الف) از هر دسته بالا، شکلی به‌عنوان مثال رسم کنید.

ب) شش ضلعی منتظم جزء کدام یک از دسته‌هاست؟

ج) شش طولانی جزء کدامیک از دسته‌هاست؟

(د) مشخص کنید که هر یک از دو شکل زیر، روش کاشی کاری کدام یک از دسته‌ها را نشان می‌دهد؟

۵) روش کاشی کاری دسته‌ای را که در شکل بالا نیامده است، بیابید.

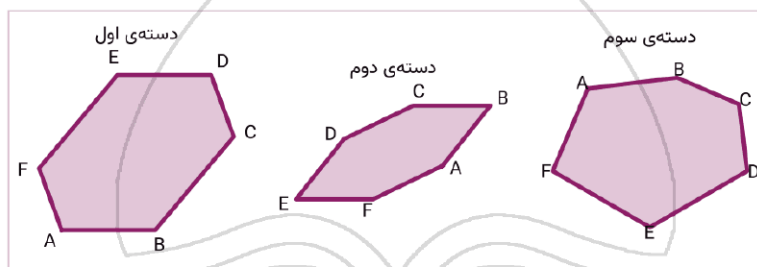
(برچسب گذاری: ضلع a بین A و F، b بین A و B، c بین B و C، d بین C و D، e بین D و E و f بین E و F.)

الف) نمونه‌ها (هر کدام با رایانه راستی‌آزمایی شد):

- **دسته‌ی اول:** شش ضلعی با مرکز تقارن و ضلع‌های $a=d=۱, b=e=۱, c=f=۰,۷$ (زاویه‌های روبه‌رو برابرند، پس $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۷۲^\circ \div ۲ = ۳۶^\circ$).

- **دسته‌ی دوم:** شش طولانی با $n=7$ که رأس‌های آن را طوری نام‌گذاری می‌کنیم که زاویه‌های کوچک (۵۱°) در B و E باشند. همه‌ی ضلع‌ها برابرند، پس $a=d$ و $c=e$ و $\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 154^\circ + 51^\circ + 154^\circ = 360^\circ$.

- **دسته‌ی سوم:** مثلث با ضلع‌های ۳، ۴، ۵ که روی هر ضلعش یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس 120° ساخته‌ایم؛ رأس‌های این مثلث‌ها A، C و E هستند ($\hat{A} = \hat{C} = \hat{E} = 120^\circ$) و دو ساق هر مثلث برابرند: $(e=f, c=d, a=b)$.



ب) شش ضلعی منتظم هر سه شرط را دارد: همه‌ی ضلع‌ها برابرند و همه‌ی زاویه‌ها 120° هستند؛ پس $a=d$ و $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=\hat{E}=\hat{F}=120^\circ$ و $e=f, c=d, a=b$ ، $\hat{A}+\hat{B}+\hat{D}=360^\circ$ (دسته‌ی اول)، $\hat{A}+\hat{B}+\hat{D}=360^\circ$ (دسته‌ی دوم)، $\hat{A}=\hat{C}=\hat{E}=120^\circ$ و $e=f, c=d, a=b$ (دسته‌ی سوم). پس جزء هر سه دسته است.

ج) در شش طولانی همه ی ضلع ها برابرند و دو زاویه ی روبه رو $s = 36^\circ \div n$ و چهار زاویه ی دیگر $t = 180^\circ - 180^\circ \div n$ است ($s + 2t = 360^\circ$). اگر A یکی از زاویه های s باشد، D هم s است و $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = s + 2t = 360^\circ$ و $a = d$ **دسته ی اول**. اگر زاویه های s را در B و E بگذاریم، $\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = t + s + t = 360^\circ$ و $a = d$ و $c = e$ **دسته ی دوم**. دسته ی سوم به $\hat{A} = \hat{C} = \hat{E} = 120^\circ$ نیاز دارد، یعنی $t = s = 120^\circ$ و $n = 6$ (شش ضلعی منتظم). پس برای $n \neq 6$ شش طولانی در دسته ی اول و دوم است. (برای $n = 4$ تا 39 با رایانه بررسی شد).

(د) کاشی کاری آبی ردیف‌هایی از شش ضلعی‌هاست که با انتقال هم ساخته می‌شوند و ضلع‌های روبه‌رو موازی و برابرند؛ این روش **دسته‌ی اول** است. کاشی کاری صورتی شش ضلعی‌ها را با چرخش‌های مختلف دور رأس‌هایی که سه کاشی دارند کنار هم گذاشته؛ این روش **دسته‌ی سوم** است (در هر رأس سه زاویه‌ی 120°).

(۵) دسته‌ی دوم ($\hat{A}+\hat{B}+\hat{D}=36^\circ$, $a=d$, $c=e$) در شکل نیامده است: هر کاشی را با نیم‌دور حول وسط یک ضلع به کاشی دیگر می‌چسبانیم و زاویه‌های $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{D}$ را کنار هم می‌گذاریم تا دور رأس 36° درجه بر شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

پاسخ: ب) هر سه دسته ج) دسته‌ی اول و دوم (برای $n \neq 6$)

تمرین ۱۷

صفحه ۵۴

۶۹

۱۷. یک شش ضلعی مقعر مثال بزنید که بتوان با آن کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

شش ضلعی «L شکل» با رأس‌های $(0,2)$ ، $(1,2)$ ، $(1,1)$ ، $(2,1)$ ، $(2,0)$ ، $(0,0)$ (سه مربع واحد که به شکل L کنار هم‌اند). در رأس $(1,1)$ زاویه‌ی داخلی 270° است؛ پس مقعر است.
با دوران 180° حول نقطه‌ی $(1, 1/5)$ ، L به شش ضلعی L' با رأس‌های $(3,0)$ ، $(2,0)$ ، $(2,1)$ ، $(1,1)$ ، $(1,2)$ ، $(3,2)$ می‌رود. L و L' روی هم نمی‌افتند و اجتماعشان مستطیل 3×2 است. مستطیل‌ها صفحه را می‌پوشانند؛ پس با L می‌توان صفحه را کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

پاسخ: شش ضلعی L شکل (دو نسخه‌ی آن یک مستطیل 3×2 می‌سازد)

تمرین ۱۸

صفحه ۵۴

۷۰

۱۸. می‌توان گفت کاشی‌کاری روی جلد کتاب با استفاده از یک نه ضلعی مقعر ساخته شده است. چرا؟
همچنین می‌توان گفت با استفاده از یک بیست و شش ضلعی مقعر ساخته شده است. چرا؟

کاشی‌کاری جلد با پنج ضلعی‌های هم‌نهشت ساخته شده است. اگر چند کاشی را که الگوی تکرارشونده‌ای می‌سازند یک‌جا و بدون خط مرز بین‌شان در نظر بگیریم، این گروه خودش یک چندضلعی است و کل صفحه با نسخه‌های هم‌نهشت این گروه پوشانده می‌شود (کاشی‌کاری تک‌وجهی تازه). مثلاً اگر دو پنج ضلعی را که رأس یکی وسط ضلع دیگری است به هم بچسبانیم و ضلع‌های هم‌راستا را یکی حساب کنیم، چندضلعی‌ای با ۹ ضلع و یک زاویه‌ی بیش از 180° (مقعر) به دست می‌آید؛ به همین ترتیب با گروه‌بندی بزرگ‌تری از پنج ضلعی‌ها چندضلعی مقعر ۲۶ ضلعی ساخته می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۹. در سال ۱۹۳۶ میلادی، هاینس ودربرگ، کاشی‌کاری تک‌وجهی زیر را ارائه کرد. n چه عددی است؟
(کاشی‌کاری با استفاده از یک n -ضلعی مقعر.)

این کاشی‌کاری «کاشی‌کاری ودربرگ» نام دارد که هاینس ودربرگ در سال ۱۹۳۶ ارائه کرد. کاشی آن یک **نُه‌ضلعی** کشیده و نامنظم است (و مقعر).

پاسخ: $n = 9$

